Équations, inéquations et systèmes

Cours de 1 BAC Économie • Méthodes détaillées, exemples et schémas

1. Équation du second degré

Discriminant : décider avant de calculer

Une équation du second degré s'écrit $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$. On calcule d'abord

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Valeur de Δ	Nombre de solutions réelles	Racine(s)
$\Delta < 0$	aucune	pas de solution dans $\mathbb{R}$
$\Delta = 0$	une racine double	$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
$\Delta > 0$	deux racines distinctes	$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Ordre à respecter : identifier a, b, c avec leurs signes, calculer Δ, choisir le bon cas, puis écrire l'ensemble des solutions.

Exemple 1 - Deux solutions

Résoudre $2x^2 - 5x + 2 = 0$. Ici $a = 2$, $b = -5$ et $c = 2$.

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 25 - 16 = 9 > 0, \qquad \sqrt{\Delta} = 3.$$

$$x_1 = \frac{5 - 3}{4} = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{5 + 3}{4} = 2.$$

Donc $S = \{\frac{1}{2}; 2\}$. Contrôle : $2(\frac{1}{2})^2 - 5(\frac{1}{2}) + 2 = 0$ et $2(2)^2 - 5(2) + 2 = 0$.

Exemples 2 et 3 - Racine double ou aucune racine

Pour $x^2 - 4x + 4 = 0$: $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$. La racine double vaut $x_0 = \frac{4}{2} = 2$, donc $S = \{2\}$ (on retrouve $(x - 2)^2 = 0$).
Pour $x^2 + 2x + 5 = 0$: $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16 < 0$. Il n'y a donc aucune solution réelle : $S = \emptyset$.

Somme et produit : une vérification rapide

Si x_1, x_2 sont les racines de $ax^2 + bx + c = 0$, alors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Exemple : $x^2 - 7x + 12 = 0$ a pour racines 3 et 4, car $3 + 4 = 7$ et $3 \times 4 = 12$. Ainsi $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$.

2. Signe et inéquations

Construire le signe du trinôme

Lorsque $\Delta > 0$, on range les racines dans l'ordre $x_1 < x_2$. Le trinôme a le signe de a à l'extérieur des racines et le signe opposé entre elles. Si $\Delta = 0$, le signe est celui de a sauf en x_0, où le trinôme s'annule. Si $\Delta < 0$, il garde partout le signe de a.

Exemple guidé - Résoudre $2x^2 - 5x + 2 \leq 0$

On a déjà trouvé les racines $\frac{1}{2}$ et 2. Comme $a = 2 > 0$, le trinôme est positif à l'extérieur et négatif entre les racines.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2 - 5x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On cherche les intervalles où le signe est négatif ou nul. Les racines sont incluses puisque l'inégalité est $\leq$. Donc

$$\boxed{S = \left[\frac{1}{2}; 2\right]}.$$

Quand le coefficient dominant est négatif

Résoudre $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$. On calcule $\Delta = 4^2 - 4(-1)(-3) = 16 - 12 = 4$ et $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Comme $a = -1 < 0$, le trinôme est positif entre ses racines :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-x^2 + 4x - 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S = [1; 3]$. **Réflexe :** le signe à l'extérieur est celui de a ; celui entre les racines est l'opposé.

3. Inéquation à deux inconnues

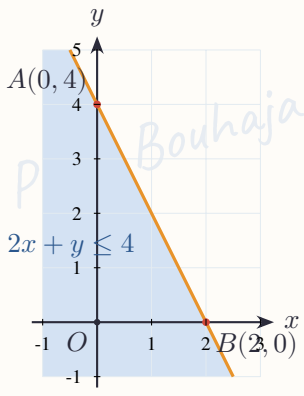
Droite frontière et demi-plan

Pour représenter $ax + by + c \leq 0$ ou $ax + by + c \geq 0$:

1. Remplacer l'inégalité par l'égalité : elle donne la droite frontière.
2. Tracer cette droite à l'aide de deux points exacts (souvent les intersections avec les axes).
3. Tester un point qui n'est pas sur la droite, par exemple $O(0, 0)$, pour choisir le demi-plan.
4. Tracer la frontière en trait plein pour $\leq$ ou $\geq$; en pointillés pour $<$ ou $>$.

Exemple guidé - Représenter $2x + y \leq 4$

La frontière est $2x + y = 4$, soit $y = 4 - 2x$. Elle passe par $A(0, 4)$ et $B(2, 0)$. Test du point $O(0, 0)$: $2 \times 0 + 0 \leq 4$ est vrai, donc on garde le côté qui contient l'origine. L'inégalité est large : la droite est incluse et se trace en trait plein.



4. Systèmes linéaires

Règles avant l'application

Un système représente deux droites ; sa solution est leur point d'intersection commun.

- **Substitution :** (1) isoler x ou y dans une équation ; (2) remplacer cette inconnue par son expression dans l'autre équation ; (3) résoudre, puis calculer l'inconnue isolée.
- **Combinaison linéaire :** (1) multiplier une ou les deux équations pour obtenir des coefficients opposés ; (2) additionner les lignes pour éliminer une inconnue ; (3) résoudre, puis remplacer pour trouver l'autre.

Exemple 1 - Substitution, calcul détaillé

Résoudre $\begin{cases} x+2y &= 5 \\ 3x-y &= 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} x &= 5-2y, \\ 3(5-2y)-y &= 1 \\ 15-7y &= 1 \quad \Longrightarrow \quad y = 2, \\ x &= 5-2\times 2 = 1. \end{aligned}$$

Vérification : $1+2\times 2=5$ et $3\times 1-2=1$. Donc le système admet l'unique solution $(x;y)=(1;2)$.

Exemple 2 - Combinaison linéaire

Résoudre $\begin{cases} 2x+3y &= 13 \quad (L_1) \\ 4x-y &= 5 \quad (L_2) \end{cases}$. Les coefficients de y ne sont pas opposés : on multiplie donc L_2 par 3.

$$3L_2 : \quad 12x-3y=15$$

On additionne cette égalité à L_1 :

$$(2x+3y)+(12x-3y)=13+15 \quad \Longrightarrow \quad 14x=28 \quad \Longrightarrow \quad x=2.$$

On remplace x dans L_2 : $4\times 2-y=5$, donc $y=3$. Vérification : $2\times 2+3\times 3=13$ et $4\times 2-3=5$. **Solution :** $(x;y)=(2;3)$.

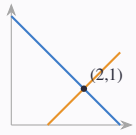
Interpréter les trois situations

Deux droites sécantes donnent une solution ; deux droites parallèles distinctes n'en donnent aucune ; deux droites confondues donnent une infinité de solutions. Voici comment les reconnaître dans les calculs et sur un schéma :

Une solution

$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$

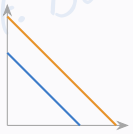
$2x=4$, donc $(x;y)=(2;1)$.



Aucune solution

$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$

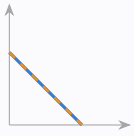
Les droites $y=2-x$ et $y=3-x$ sont parallèles.



Infinité

$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$

Les deux équations donnent $y=2-x$.



Pour le système de l'exemple 2, les droites $y=7-2x$ et $y=x-2$ se coupent en $(3,1)$: le schéma correspond bien à une solution unique. **Toujours contrôler** le couple dans les deux équations de départ.

4. Systèmes linéaires - méthode des déterminants

Règle de Cramer : calculer Δ, Δ_x et Δ_y

Pour le système $\begin{cases} ax+by &= c \\ a'x+b'y &= c' \end{cases}$, on calcule les déterminants suivants :

$$\Delta = ab' - a'b, \qquad \Delta_x = cb' - c'b, \qquad \Delta_y = ac' - a'c.$$

Si $\Delta \neq 0$, le système admet une seule solution et

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}}.$$

Repère de calcul : dans Δ, utiliser les coefficients de x et y ; dans Δ_x, remplacer la colonne de x par les constantes ; dans Δ_y, remplacer la colonne de y par les constantes.

Exemple guidé - Résoudre par les déterminants

Reprenons $\begin{cases} 2x+y &= 7 \\ x-y &= 2 \end{cases}$. On lit $a=2, b=1, c=7, a'=1, b'=-1, c'=2$.

$$\begin{aligned} \Delta &= 2\times(-1) - 1\times 1 = -2-1 = -3, \\ \Delta_x &= 7\times(-1) - 2\times 1 = -7-2 = -9, \\ \Delta_y &= 2\times 2 - 1\times 7 = 4-7 = -3. \end{aligned}$$

Comme $\Delta = -3 \neq 0$, il existe une solution unique :

$$x = \frac{-9}{-3} = 3, \qquad y = \frac{-3}{-3} = 1.$$

On retrouve $(3;1)$. Vérification : $2\times 3 + 1 = 7$ et $3 - 1 = 2$.

Que faire si $\Delta = 0$?

La formule $\frac{\Delta_x}{\Delta}$ n'est alors pas utilisable. Il faut comparer les deux équations :

- équations équivalentes : les droites sont confondues, il y a une infinité de solutions ;
- équations incompatibles : les droites sont parallèles distinctes, il n'y a aucune solution.

Exemple avec une infinité : $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$. La deuxième ligne est le double de la première ; tout point de $x+y=2$ convient.

Exemple sans solution : $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=5 \end{cases}$. La première ligne imposerait $2x+2y=4$, ce qui contredit la deuxième ; aucune solution.

Les trois méthodes - choisir et conclure

Méthode	Quand l'utiliser ?	Premier geste
Substitution	Une inconnue s'isole facilement.	Exprimer x ou y, puis remplacer.
Combinaison linéaire	Les coefficients permettent de supprimer une inconnue.	Multiplier les lignes, puis les additionner ou les soustraire.
Déterminants	On veut une formule directe et $\Delta \neq 0$.	Calculer Δ, puis Δ_x et Δ_y.

Dans chaque méthode, finir par une vérification dans les équations initiales et écrire l'ensemble solution.