Équations et systèmes : l'essentiel

Fiche de révision • 1 BAC Économie • Formules, signes et méthodes

1. Équation du second degré

Forme réduite : $ax^2+bx+c=0$, avec $a\neq 0$. Calculer

$$\Delta = b^2-4ac.$$

$\Delta<0$	aucune racine réelle
$\Delta=0$	$x_0=-\dfrac{b}{2a}$
$\Delta>0$	$x_{1,2}=\dfrac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemple - Calculer Δ

Pour $2x^2-5x+2=0$: $a=2$, $b=-5$, $c=2$.

$$\Delta=(-5)^2-4\times 2\times 2=9.$$

Donc $x_1=\frac{1}{2}$ et $x_2=2$. Vérifier en remplaçant chaque racine dans l'équation.

Somme et produit

Si x_1, x_2 sont les racines :

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\qquad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Ainsi $x^2-Sx+P=(x-x_1)(x-x_2)$ lorsque $S=x_1+x_2$ et $P=x_1x_2$.

2. Signe et inéquations

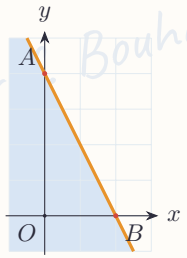
Pour $\Delta>0$, ranger les racines $x_1<x_2$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		$\operatorname{sgn}(a)$	0	$-\operatorname{sgn}(a)$	0	$\operatorname{sgn}(a)$	

Pour $\Delta=0$, le trinôme garde le signe de a et s'annule en x_0.
Pour $\Delta<0$, il garde partout le signe de a.
Exemple : $2x^2-5x+2\leq 0$ avec $a>0$: le signe est négatif entre les racines, donc $S=[\frac{1}{2};2]$.

3. Inéquation à deux inconnues

Pour représenter $2x+y\leq 4$: la frontière est $y=4-2x$, passant par $A(0,4)$ et $B(2,0)$. Tester $O(0,0)$: $0\leq 4$, donc garder le demi-plan qui contient O. Frontière pleine pour $\leq$ ou $\geq$; pointillée pour $<$ ou $>$.



4. Systèmes linéaires

Substitution : isoler une inconnue, remplacer son expression dans l'autre équation, puis revenir calculer la première.
Combinaison linéaire : multiplier les lignes pour rendre deux coefficients opposés, additionner, puis remplacer.

Pour $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$:

$$\Delta=ab'-a'b,\quad \Delta_x=cb'-c'b,\quad \Delta_y=ac'-a'c.$$

Si $\Delta\neq 0$: $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$ et $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$.

Exemple - Déterminants

$$\begin{cases} 2x+y &= 7 \\ x-y &= 2 \end{cases}$$

$$\Delta=-3,\qquad \Delta_x=-9,\qquad \Delta_y=-3.$$

Donc $x=\frac{-9}{-3}=3$ et $y=\frac{-3}{-3}=1$. Vérifier le couple dans les deux lignes.

Si $\Delta=0$

La formule de Cramer ne s'applique pas. Comparer les équations : droites confondues $\Rightarrow$ infinité de solutions ; droites parallèles distinctes $\Rightarrow$ aucune solution.