# Logique et raisonnement

Cours de 1 BAC Économie • Énoncés, connecteurs et méthodes de preuve

## 1. Proposition et vérité

### Énoncé logique

Une proposition est un énoncé auquel on peut attribuer une valeur de vérité : vraie (V) ou fausse (F), jamais les deux simultanément. « 7 est premier » est vraie ; « 9 est premier » est fausse. Une question ou un ordre n'est pas une proposition.

### Variable et proposition ouverte

Une phrase contenant une variable, comme $P(x) : x^2 = 9$, est une proposition ouverte. Sa vérité dépend de la valeur de $x$ : $P(3)$ est vraie, $P(2)$ est fausse. On précise toujours l'ensemble de référence, par exemple $x \in \mathbb{R}$.

### Application guidée

Pour $A(x) : x + 2 = 7$, $A(5)$ est vraie et $A(1)$ est fausse. Résoudre $A(x)$ revient à déterminer les valeurs qui rendent la proposition vraie : $x = 5$.

## 2. Connecteurs logiques

### Négation, et, ou

La négation $\neg P$ inverse la vérité de $P$. $P \wedge Q$ est vraie lorsque les deux propositions sont vraies. $P \vee Q$ (ou inclusif) est fausse seulement si $P$ et $Q$ sont toutes deux fausses.

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | V | V |
| V | F | F | F | V |
| F | V | V | F | V |
| F | F | V | F | F |

### Implication et équivalence

$P \Rightarrow Q$ est fausse uniquement lorsque $P$ est vraie et $Q$ fausse. $P$ est alors une condition suffisante pour $Q$ et $Q$ une condition nécessaire pour $P$. $P \Leftrightarrow Q$ signifie que les deux implications sont vraies ; $P$ et $Q$ ont alors la même valeur de vérité.

### Application guidée

Soit $P$: « $x > 2$ » et $Q$: « $x > 0$ ». Pour $x = 3$, $P \Rightarrow Q$ est vraie. Pour $x = 1$, $P$ est fausse, donc l'implication reste vraie. Pour $x = -1$, $P$ est fausse et $Q$ aussi : l'implication est encore vraie.

## 3. Quantificateurs

### Universel et existentiel

$\forall x \in E, P(x)$ se lit « pour tout $x$ de $E$ ». Pour prouver cette affirmation, on raisonne pour un élément quelconque. $\exists x \in E : P(x)$ se lit « il existe au moins un $x$ ». Un exemple qui convient suffit. Pour réfuter un universel, un contre-exemple suffit.

### Nier correctement

$$\neg(\forall x \in E, P(x)) \iff \exists x \in E : \neg P(x), \qquad \neg(\exists x \in E, P(x)) \iff \forall x \in E : \neg P(x).$$

Exemple : la négation de « tout réel vérifie $x^2 \geq 0$ » est « il existe un réel $x$ tel que $x^2 < 0$ ».

### Quantificateurs successifs

L'ordre compte lorsque les quantificateurs sont différents. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y > x$ est vraie (prendre $y = x + 1$). $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : y > x$ est fausse.

## 4. Rédiger une preuve

### Quatre démarches utiles

**Directe :** partir des hypothèses et transformer jusqu'à la conclusion. **Contre-exemple :** pour réfuter un « pour tout », choisir une valeur qui contredit la propriété. **Contraposée :** pour prouver $P \Rightarrow Q$, prouver $\neg Q \Rightarrow \neg P$. **Récurrence :** vérifier le rang initial, supposer la propriété au rang $n$, puis établir le rang $n + 1$.

### Application guidée / récurrence

Montrer que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour $n \geq 1$. Initialisation : vrai pour $n = 1$. Hérédité : si la formule est vraie au rang $n$, alors $1 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. La formule est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

### À retenir

Pour démontrer une propriété, annonce la démarche et les hypothèses utilisées. Pour une négation, inverse le quantificateur puis nie la propriété. Pour une récurrence, écris séparément l'initialisation et l'hérédité.