Logique et raisonnement

Série 1 • Connecteurs, quantificateurs et démonstrations • Sans corrigé

Repère $\neg\forall x\,P(x) \iff \exists x\,\neg P(x)$; $\neg\exists x\,P(x) \iff \forall x\,\neg P(x)$. Un contre-exemple réfute un énoncé universel.

01 Vrai ou faux ?

Dire si chaque phrase est une proposition et, si oui, donner sa valeur de vérité : a) 12 est divisible par 3 ; b) $x+1=4$; c) Ferme le cahier ; d) $\sqrt{2}$ est rationnel.

02 Négations simples

Écrire la négation de : a) $x \geq 4$; b) $x \in \mathbb{Q}$; c) A et B ; d) A ou B.

03 Quantificateurs

Écrire avec des quantificateurs : a) le carré de tout réel est positif ou nul ; b) certains entiers sont multiples de 5 ; c) aucun réel n'est strictement inférieur à lui-même.

04 Nier une phrase

Donner la négation exacte de : a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+1>0$; b) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2=12$; c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y>x$.

05 Table de vérité

Construire les tables de vérité de $P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$ et $\neg(P \wedge Q)$. Pour chacune, préciser les lignes où elle est vraie.

06 Loi logique

À l'aide d'une table de vérité, vérifier $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$.

07 Condition nécessaire

On pose P : « n est divisible par 6 » et Q : « n est pair ». Écrire $P \Rightarrow Q$ et sa contraposée. Dire si la réciproque est vraie, puis justifier.

Suite Écrire les variables et leur ensemble de référence avant d'utiliser un quantificateur.

08 Ordre des quantificateurs

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse et justifier : a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y > x$; b) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : y > x$.

09 Contre-exemple

Réfuter chacune des affirmations universelles lorsqu'elle est fausse, en indiquant un contre-exemple : a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x$; b) $\forall n \in \mathbb{N}, n+1$ est pair.

10 Preuve directe

Soient a, b deux entiers pairs. Écrire $a = 2k$ et $b = 2\ell$, puis démontrer que $a + b$ est pair et que ab est divisible par 4.

11 Contraposée

Démontrer : si n^2 est impair, alors n est impair, pour $n \in \mathbb{Z}$. Utiliser la contraposée et distinguer les cas de parité.

12 Récurrence : somme

Pour $n \geq 1$, démontrer par récurrence : $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$. Écrire l'initialisation, l'hypothèse de récurrence et l'étape d'hérédité.

13 Récurrence : divisibilité

Démontrer que $7^n - 1$ est divisible par 6 pour tout entier $n \geq 1$.

14 Récurrence : inégalité

Démontrer par récurrence que $2^n \geq n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

15 Synthèse

On considère $P(n)$: $n^3 - n$ est divisible par 3. a) Tester $n = 0, 1, 2$. b) Factoriser $n^3 - n$. c) Démontrer la propriété par récurrence ou par factorisation et divisibilité.