Logique et raisonnement

Série 2 • Raisonnement, négation et récurrence • Sans corrigé

Méthode Une récurrence comporte : rang initial, hypothèse au rang n, preuve au rang $n+1$, conclusion.

01 Quantifier

Traduire avec $\forall$ et $\exists$: a) tout réel possède un opposé ; b) il existe un entier naturel supérieur à 100 ; c) entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

02 Négation composée

Écrire la négation de : a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 4x + 5 > 0$; b) $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 + 1$ est divisible par 3 ; c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$.

03 Valeur de vérité

Étudier la vérité et justifier : a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$; b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$; c) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m > n$.

04 Implication

Pour chaque implication, donner la réciproque et la contraposée, puis décider lesquelles sont vraies : a) n divisible par $10 \Rightarrow n$ divisible par 5 ; b) $x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$ pour $x \in \mathbb{R}$.

05 Preuve par l'absurde

Démontrer qu'il n'existe pas de plus grand entier naturel. Supposer qu'un tel entier N existe et construire un entier naturel plus grand.

06 Somme de carrés

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Démontrer que $a^2 + b^2 = 0$ implique $a = b = 0$. Indiquer où intervient la positivité des carrés.

Suite Pour l'hérédité, remplacer le rang n par $n+1$ et isoler le dernier terme.

07 Récurrence : carrés

Démontrer pour tout $n \geq 1$: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

08 Récurrence : puissances

Pour $n \geq 1$, démontrer que $3^{2n} - 1$ est divisible par 8. Détailler l'étape qui relie les rangs n et $n+1$.

09 Récurrence : suite géométrique

Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Démontrer par récurrence : $1 + q + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ pour $n \geq 0$.

10 Somme télescopique

Pour $n \geq 1$, démontrer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$. On pourra écrire $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

11 Divisibilité

Démontrer que $n^3 + 2n$ est divisible par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$. Proposer une preuve par récurrence, puis une preuve par étude des restes modulo 3.

12 Inégalité

Pour $n \geq 4$, démontrer par récurrence que $2^n \geq n^2$. Préciser le premier rang où l'affirmation est vraie.

13 Somme de cubes

Démontrer pour $n \geq 1$: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

14 Choisir la méthode

Pour chacune des affirmations, choisir entre preuve directe, contraposée, contre-exemple, absurde ou récurrence, puis rédiger : a) le produit de deux impairs est impair ; b) si n^2 est pair alors n est pair ; c) $n^2 \geq n$ pour tout entier $n \geq 1$.