Barycentre dans le plan

Cours détaillé • 1 BAC Sciences expérimentales • Définitions, méthodes, exemples et applications

1. Points pondérés et barycentre de deux points

Un **point pondéré** est un couple (A, α) formé d'un point A et d'un réel α, appelé son **coefficient** ou sa **masse**. Un système pondéré s'écrit par exemple $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$. La somme $S = \alpha + \beta$ est la masse totale.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $S = \alpha + \beta \neq 0$. Il existe un unique point G vérifiant

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Ce point est le **barycentre** du système et se note $G = \text{bar}\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$.

Existence et unicité : démonstration

Par Chasles, $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$. Si $\alpha + \beta \neq 0$:

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \iff (\alpha+\beta)\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\iff \boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}}.$$

Le vecteur de droite est fixé : il définit un unique point G. Si $A \neq B$ et $\alpha = -\beta \neq 0$, l'égalité imposerait $\beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}$: il n'y a aucune solution.

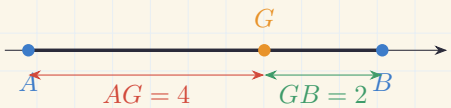
Exemple guidé : reconnaître un barycentre

Si $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$, utiliser $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$:

$$2(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + 3\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{CB} = \vec{0} \iff 5\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = \vec{0} \iff 5\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}.$$

Puisque $5 + 1 = 6 \neq 0$, on conclut $C = \text{bar}\{(A,5);(B,1)\}$.

$G = \text{bar}\{(A,1);(B,2)\}$



Cas particuliers et homogénéité

Si $\alpha = \beta \neq 0$, alors G est le milieu de $[AB]$. Multiplier tous les coefficients par un même réel non nul ne change pas le barycentre : par exemple, $\text{bar}\{(A,2);(B,4)\} = \text{bar}\{(A,1);(B,2)\}$. En revanche, si $\alpha + \beta = 0$, la définition ne détermine pas un barycentre unique.

Exemple guidé : lire la position de G

Pour $G = \text{bar}\{(A,2);(B,3)\}$, la formule donne $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$. Le coefficient $\frac{3}{5}$ est compris entre 0 et 1 : G est donc sur le segment $[AB]$, aux trois cinquièmes du trajet de A vers B. Si $AB = 10$ cm, alors $AG = 6$ cm et $GB = 4$ cm.

Application à faire : choisir les bons poids

Soit $AB = 8$ cm. Placer G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, puis vérifier que $G = \text{bar}\{(A,3);(B,1)\}$. Calculer AG et GB.

Deux points

Barycentre dans le plan • Position, relation caractéristique et coordonnées

2. Position et propriétés pour deux points

La relation de Chasles donne $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$. En la remplaçant dans la définition du barycentre :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}}.$$

- Si α et β sont de même signe, G appartient au segment $[AB]$.
- Si α et β sont de signes contraires, G est à l'extérieur du segment $[AB]$.
- Si $\alpha = \beta \neq 0$, alors G est le milieu de $[AB]$.

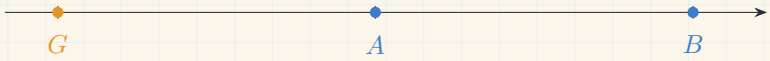
Exemple guidé : un coefficient négatif

Sur une droite graduée, $A(0)$ et $B(6)$. Déterminons la position de $G = \text{bar}\{(A,2);(B,-1)\}$. La somme des coefficients est $S = 2-1 = 1 \neq 0$. Avec la formule de position :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{-1}{2-1}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}.$$

Or $\overrightarrow{AB}$ correspond à un déplacement de 6 unités vers la droite. Le vecteur opposé $-\overrightarrow{AB}$ déplace de 6 unités vers la gauche : $x_G = x_A - 6 = -6$. Ainsi $G(-6)$, à l'extérieur de $[AB]$, du côté opposé à B.

$\alpha = 2, \quad \beta = -1$



Relation caractéristique

Pour tout point M du plan :

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}}.$$

Elle permet de remplacer une somme de vecteurs par un seul vecteur vers le barycentre.

Pourquoi cette relation ?

Par Chasles, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}$. Ainsi

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG} + \underbrace{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}}_{\vec{0}} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}.$$

Coordonnées de deux points : formule et exemple

Dans un repère, pour $S = \alpha + \beta \neq 0$, prendre $M = O$ donne

$$S\overrightarrow{OG} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{S}, \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{S}}.$$

Pour $A(1,2)$, $B(7,-1)$ et les poids 2 et 1, la somme vaut $3 \neq 0$. Alors

$$x_G = \frac{2\times 1 + 1\times 7}{3} = 3, \qquad y_G = \frac{2\times 2 + 1\times(-1)}{3} = 1.$$

Donc $G(3,1)$. Vérification : $\overrightarrow{AG} = (2,-1) = \frac{1}{3}(6,-3) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Trois points

Barycentre dans le plan • Coordonnées et centre de gravité

3. Barycentre de trois points

Soient A, B, C trois points et α, β, γ trois réels tels que $S = \alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Il existe un unique point G tel que

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Pour tout point M :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = S\overrightarrow{MG}.$$

Dans un repère, si $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$, alors

$$\boxed{x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{S}, \qquad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{S}.}$$

Lorsque $\alpha = \beta = \gamma = 1$, ce barycentre est le centre de gravité du triangle : ses coordonnées sont les moyennes des coordonnées des trois sommets.

Exemple guidé : retrouver les coefficients

Soient A, B, C, D tels que $2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AD} = \vec{0}$. Montrons que D est un barycentre. On exprime tous les vecteurs à partir de D : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{DA}$. Ainsi

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AD} &= 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) - 3(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) - 4\overrightarrow{AD} \\ &= 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DC} - 3\overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{DB} - 4\overrightarrow{AD} \\ &= 5\overrightarrow{DA} - 3\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC}. \end{aligned}$$

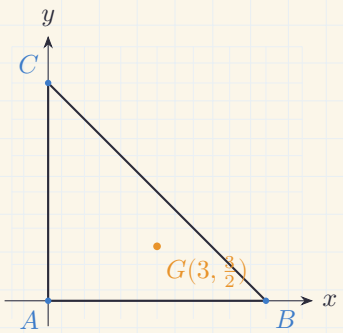
La somme $5 - 3 + 2 = 4$ est non nulle. Donc $\boxed{D = \text{bar}\{(A, 5); (B, -3); (C, 2)\}}$.

Exemple guidé : calculer les coordonnées

Prenons $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(0, 6)$ et $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$. On commence par vérifier la masse totale : $S = 1+2+1 = 4 \neq 0$. On calcule ensuite chaque coordonnée séparément :

$$x_G = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 0}{4} = 3, \qquad y_G = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Donc $\boxed{G(3, \frac{3}{2})}$.



Application à faire

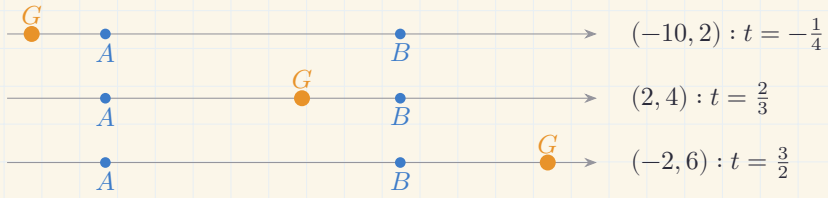
Dans un repère, $A(2, 1)$, $B(-1, 4)$ et $C(3, -2)$. Calculer les coordonnées de $G = \text{bar}\{(A, 2); (B, 1); (C, 3)\}$. Vérifier que la somme des coefficients permet bien de définir G.

Constructions et médianes

Deux ou trois points • Lire, construire, vérifier

Sur la droite (AB) : trois positions à reconnaître

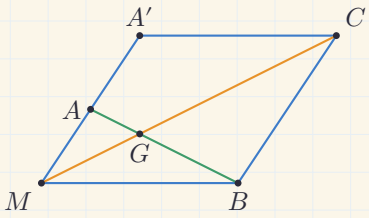
Calculer $t = \beta/(\alpha+\beta)$, puis construire $\overrightarrow{AG} = t\overrightarrow{AB}$. Si $0 \le t \le 1$, $G \in [AB]$; si $t < 0$, G est avant A ; si $t > 1$, il est au-delà de B dans le sens de A vers B.



Construction par un parallélogramme : pas à pas

Exemple : $G = \text{bar}\{(A,2);(B,1)\}$. Choisir $M \notin (AB)$.

1) Construire A' tel que $\overrightarrow{MA'} = 2\overrightarrow{MA}$, puis compléter le parallélogramme $MA'CB$.
2) On a $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MG}$.
3) Donc $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$ et $G = (MC) \cap (AB)$.



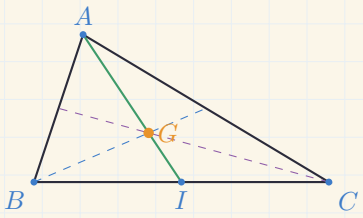
$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$$

Centre de gravité : démonstration sur une médiane

Pour $G = \text{bar}\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$, soit I le milieu de $[BC]$. On sait que $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$. Ainsi

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \iff \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GI} = \vec{0}$$
$$\iff -\overrightarrow{AG} + 2(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AG}) = \vec{0} \iff \boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}}.$$

Donc G appartient à la médiane (AI) et $AG = 2GI$. Les trois médianes passent par G.



Si $AI = 9$ cm :

$AG = \frac{2}{3} \times 9 = 6$ cm

$GI = 9 - 6 = 3$ cm

Application : coordonnées et médianes

Dans un repère, $A(0,6)$, $B(-3,0)$ et $C(3,0)$. Calculer les coordonnées de leur isobarycentre G puis du milieu I de $[BC]$. Vérifier par les coordonnées que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$; calculer AG et GI.

Associativité

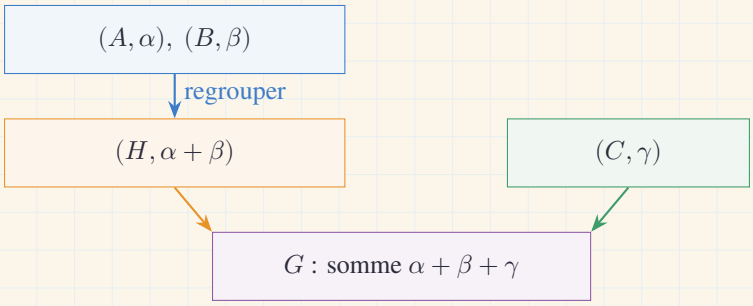
Barycentre dans le plan • Regrouper les points pondérés

4. Barycentres partiels et associativité

On regroupe parfois deux points en un barycentre partiel H. Le système de trois points devient alors un système de deux points :

$$H = \text{bar}\{(A,\alpha);(B,\beta)\}, \qquad G = \text{bar}\{(H,\alpha+\beta);(C,\gamma)\}.$$

Il faut $\alpha+\beta \neq 0$ et $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$.



Exemple guidé : construire sur une droite

Sur une droite, $A(0)$, $B(6)$ et $C(12)$. Construisons $G = \text{bar}\{(A,2);(B,-1);(C,3)\}$. La masse totale vaut $2-1+3=4\neq 0$. On regroupe d'abord A et B : leur somme est $2-1=1\neq 0$, donc

$$H = \text{bar}\{(A,2);(B,-1)\},$$
$$x_H = \frac{2x_A - x_B}{2-1} = \frac{2\cdot 0 - 6}{1} = -6.$$

Par associativité, $G = \text{bar}\{(H,1);(C,3)\}$. Alors

$$x_G = \frac{1\cdot(-6)+3\cdot 12}{1+3} = \frac{30}{4} = \boxed{7,5}.$$

On peut vérifier directement : $x_G = (2\cdot 0 - 1\cdot 6 + 3\cdot 12)/4 = 7,5$.

Le barycentre final G est le barycentre de $(H,\alpha+\beta)$ et (C,γ) ; il appartient donc à la droite (HC). Le regroupement fournit souvent un alignement à démontrer.

Application à faire

Soit $G = \text{bar}\{(A,1);(B,3);(C,2)\}$. Poser $H = \text{bar}\{(A,1);(B,3)\}$, puis écrire le système réduit dont G est le barycentre. En déduire une droite à laquelle appartient G.

Application guidée : alignement et milieu

Soient $G = \text{bar}\{(A,1);(B,1);(C,2)\}$ et I le milieu de $[AB]$. Comme $I = \text{bar}\{(A,1);(B,1)\}$, le système se réduit à $G = \text{bar}\{(I,2);(C,2)\}$. Les coefficients étant égaux, G est le milieu de $[IC]$. Donc I, G, C sont alignés.

Application résolue : regrouper quatre points

Soit $G = \text{bar}\{(A,1);(B,1);(C,2);(D,2)\}$. Posons $I = \text{bar}\{(A,1);(B,1)\}$ et $J = \text{bar}\{(C,2);(D,2)\}$. Alors $G = \text{bar}\{(I,2);(J,4)\}$. Ainsi $G \in (IJ)$ et $\overrightarrow{IG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$. Cette réduction transforme un calcul à quatre points en deux barycentres de deux points.

Quatre points

Barycentre dans le plan • Système pondéré et calcul coordonné

5. Barycentre de quatre points

Pour A, B, C, D affectés des coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, le barycentre existe si

$$S = \alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0.$$

Par définition, G est l'unique point vérifiant

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} + \delta\overrightarrow{GD} = \vec{0}}.$$

Pour tout point M, $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} + \delta\overrightarrow{MD} = S\overrightarrow{MG}$. Ses coordonnées sont la moyenne pondérée des coordonnées des quatre points :

$$\boxed{x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \delta x_D}{S}, \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C + \delta y_D}{S}}.$$

Si les quatre coefficients sont égaux et non nuls, le barycentre est l'isobarycentre du quadrilatère : on fait la moyenne des coordonnées des sommets.

Exemple détaillé : coefficients positifs et négatifs

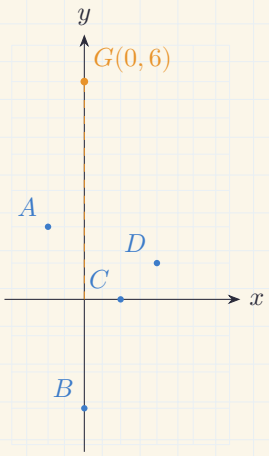
On prend $A(-1, 2)$, $B(0, -3)$, $C(1, 0)$, $D(2, 1)$ et les coefficients $2, -3, 4, -1$. Étape 1 : la masse totale est $S = 2 - 3 + 4 - 1 = 2 \neq 0$, donc le barycentre existe. Étape 2 : on remplace chaque coordonnée par sa valeur, en gardant les signes des coefficients :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{2(-1) + (-3)(0) + 4(1) + (-1)(2)}{2} \\ &= \frac{-2 + 0 + 4 - 2}{2} = 0, \\ y_G &= \frac{2(2) + (-3)(-3) + 4(0) + (-1)(1)}{2} \\ &= \frac{4 + 9 + 0 - 1}{2} = 6. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{G(0, 6)}$. Vérification : le dénominateur utilisé pour les deux coordonnées est bien la même somme $S = 2$.

Méthode de calcul en repère

1) Additionner les coefficients et vérifier que $S \neq 0$.
2) Calculer séparément $\sum \alpha_i x_i$ et $\sum \alpha_i y_i$.
3) Diviser les deux résultats par la même somme S.
4) Vérifier le signe et la cohérence des coordonnées obtenues.



Exemple : un parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. Comme O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}, \qquad \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

En additionnant, on obtient

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

La somme des poids est $4 \neq 0$; donc O est l'isobarycentre des quatre sommets.

Invariance. Pour deux, trois ou quatre points, multiplier tous les coefficients par un même réel non nul ne change pas le barycentre.

Applications et bilan

Barycentre dans le plan • Les réflexes à garder

6. Choisir la bonne méthode

Ce qu'on cherche	Réflexe
hline Vérifier qu'un point est barycentre	Contrôler la somme des coefficients, puis vérifier l'égalité vectorielle de définition.
Placer un barycentre de deux points	Utiliser $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ et interpréter le signe.
Simplifier une somme de vecteurs	Choisir un point M quelconque et appliquer $\sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = S\overrightarrow{MG}$.
Calculer des coordonnées	Faire la moyenne pondérée des abscisses et des ordonnées, avec la même somme S.
Construire avec trois ou quatre points	Regrouper des points en barycentres partiels, puis appliquer l'associativité.

Erreurs à éviter

Oublier de vérifier $S \neq 0$; remplacer un coefficient négatif par sa valeur absolue ; diviser les coordonnées par le nombre de points plutôt que par la somme des coefficients ; confondre un vecteur avec sa norme. Par exemple, $\sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = S\overrightarrow{MG}$ est une égalité de vecteurs, tandis que $\left\|\sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i}\right\| = r$ est une condition de distance.

Applications de synthèse

1) Dans un repère, $A(1,2)$, $B(4,-1)$ et $C(-2,3)$. Déterminer les coordonnées de $G = \text{bar}\{(A,2);(B,-1);(C,2)\}$.
2) Soit $H = \text{bar}\{(A,2);(B,1)\}$ et $G = \text{bar}\{(A,2);(B,1);(C,3)\}$. Réécrire G avec H et C, puis préciser une droite contenant G.
3) Soient A, B, C non alignés et $I = \text{bar}\{(A,1);(B,1)\}$. Décrire géométriquement I. Si $G = \text{bar}\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$, quelle propriété du centre de gravité du triangle retrouve-t-on ?

Application résolue : un cercle

Soit $G = \text{bar}\{(A,2);(B,4)\}$. Déterminer les points M tels que $\|2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\| = 12$.

$$\|2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\| = 12 \iff \|6\overrightarrow{MG}\| = 12 \iff 6MG = 12 \iff MG = 2.$$

Le lieu est le cercle de centre G et de rayon 2 (dans l'unité de longueur choisie).

Application résolue : une médiatrice

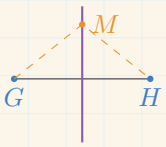
Soient $G = \text{bar}\{(A,2);(B,4)\}$ et $H = \text{bar}\{(A,4);(B,2)\}$, avec $A \neq B$. Comme $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, on a $G \neq H$.

$$\|2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\| = \|4\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| \iff 6MG = 6MH \iff MG = MH.$$

Le lieu est donc la médiatrice du segment $[GH]$.



$MG = 2$



$MG = MH$

Bilan. Vérifier la somme des coefficients, choisir la relation vectorielle ou les coordonnées, puis interpréter le résultat géométriquement. Pour une égalité de normes, prendre la valeur absolue de la masse totale.