Série N°1 ★ Corrigé détaillé

Rappel · Les deux relations essentielles

Si $\alpha+\beta\neq 0$, alors $G=\text{bar}\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$ équivaut à

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}.$$

Pour tout point M, $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

Exercice 1 · Existence et construction

1) Condition d'existence. La somme des coefficients vaut

$$m+(m-1)=2m-1.$$

Le barycentre existe et est unique si et seulement si $\boxed{m\neq\frac{1}{2}}$. Pour ces valeurs de m, la définition donne

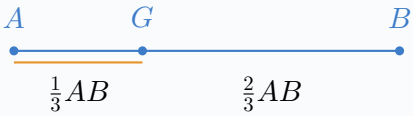
$$\boxed{m\overrightarrow{GA}+(m-1)\overrightarrow{GB}=\vec{0}.}$$

Si $m\neq 1$, on peut écrire $\overrightarrow{GB}=-\dfrac{m}{m-1}\overrightarrow{GA}$. **Cas particulier :** si $m=1$, alors $\overrightarrow{GA}=\vec{0}$ et $G=A$. On ne divise donc pas par $m-1$.

2) Cas $m=2$. On a $G=\text{bar}\{(A;2),(B;1)\}$, d'où

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2+1}\overrightarrow{AB}=\boxed{\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}}.$$

Ainsi G appartient à $[AB]$, au tiers du segment à partir de A ; $AG=\frac{1}{3}AB$ et $GB=\frac{2}{3}AB$.



Exercice 2 · Retrouver les coefficients

1) Détermination de α et β. On sait que $\overrightarrow{FK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FE}$. Par la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{FK}=\overrightarrow{FE} &\iff 3\overrightarrow{FK}=\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{KE}\\ &\iff 2\overrightarrow{FK}-\overrightarrow{KE}=\vec{0}\\ &\iff \boxed{\overrightarrow{KE}+2\overrightarrow{KF}=\vec{0}}.\end{aligned}$$

Comme $1+2=3\neq 0$, on obtient $\boxed{K=\text{bar}\{(E;1),(F;2)\}}$. Un choix convient donc : $\boxed{\alpha=1,\ \beta=2}$. Plus généralement, tout couple $(\lambda,2\lambda)$, avec $\lambda\neq 0$, convient.

2) Coefficient de F lorsque celui de E vaut -2. On multiplie les deux coefficients précédents par -2 :

$$K=\text{bar}\{(E;-2),(F;-4)\}.$$

Ainsi $\boxed{x=-4}$ et la somme des coefficients vaut $-6\neq 0$. L'unicité vient de $E\neq F$: avec $\overrightarrow{KE}=-2\overrightarrow{KF}$, la relation $-2\overrightarrow{KE}+x\overrightarrow{KF}=\vec{0}$ donne $(4+x)\overrightarrow{KF}=\vec{0}$, donc $x=-4$.

Série N°1 ★ Corrigé détaillé

Exercice 3 · Déterminer l'ensemble de points

On a $G = \text{bar}\{(A;3),(B;-5)\}$. La somme des coefficients vaut $3-5=-2\neq 0$. Pour tout point M,

$$3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MG}, \qquad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI},$$

puisque I est le milieu de $[AB]$. L'égalité demandée devient

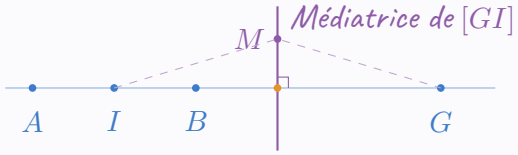
$$\begin{aligned}\left\|3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\| &\iff \|-2\overrightarrow{MG}\| = \|2\overrightarrow{MI}\| \\ &\iff 2MG = 2MI \\ &\iff \boxed{MG = MI}.\end{aligned}$$

Vérifions que $G\neq I$. La formule de position donne

$$\overrightarrow{AG}=\frac{-5}{3-5}\overrightarrow{AB}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Comme $A\neq B$, ces deux points sont distincts. L'ensemble des points équidistants de G et de I est donc

$$\boxed{\mathcal{E} = \text{la médiatrice du segment } [GI].}$$



Exercice 4 · Intersection de deux droites

1) Écriture barycentrique de G par rapport à E et F. À partir de $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EF}$ et de $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GF}$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EG}=2(\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GF}) &\iff \overrightarrow{EG}+2\overrightarrow{GF}=\vec{0} \\ &\iff \boxed{-\overrightarrow{GE}+2\overrightarrow{GF}=\vec{0}}.\end{aligned}$$

Comme $-1+2=1\neq 0$, on en déduit

$$\boxed{G = \text{bar}\{(E;-1),(F;2)\}.}$$

2) Intersection. Puisque G est le barycentre de $(A;2)$ et $(B;-3)$, on a $G\in(AB)$. La relation $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EF}$ donne aussi $G\in(EF)$.
De plus $E\notin(AB)$, donc (EF) et (AB) sont deux droites distinctes. Elles ont exactement un point commun :

$$\boxed{(EF)\cap(AB)=\{G\}.}$$

Position pour le schéma : $\overrightarrow{AG}=\frac{-3}{2-3}\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AB}$; ainsi G est au-delà de B. De plus $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$: F est le milieu de $[EG]$.

