Série N°1 ★ Barycentre de deux points

Les rappels à garder sous les yeux

Pour $\alpha+\beta\neq 0$, $G=\text{bar}\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$ si et seulement si

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0},\qquad \overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}.$$

Propriété caractéristique : pour tout point M du plan,

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}.$$

Homogénéité : multiplier les deux coefficients par un même réel non nul ne change pas le barycentre. **Milieu :** si I est le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

Exercice 1 · Existence et construction

Soient A et B deux points distincts et $m\in\mathbb{R}$.

1) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $(A;m)$ et $(B;m-1)$ admettent un barycentre G. Écrire alors une relation entre $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GA}$.

2) Construire G lorsque $m=2$.

Indice : commencer par la somme des coefficients ; pour la construction, exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 2 · Retrouver les coefficients

Soient E,F,K trois points du plan, avec $E\neq F$, tels que

$$\overrightarrow{FK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FE}.$$

1) Déterminer deux réels α et β pour que K soit le barycentre de $(E;\alpha)$ et $(F;\beta)$.

2) Déterminer le réel x pour que K soit le barycentre de $(E;-2)$ et $(F;x)$.

Indice : utiliser $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{KE}$, puis écrire une relation de la forme $\alpha\overrightarrow{KE}+\beta\overrightarrow{KF}=\vec{0}$.

Exercice 3 · Déterminer un ensemble de points

Soient A et B deux points distincts, I le milieu de $[AB]$ et G le barycentre de $(A;3)$ et $(B;-5)$. Déterminer l'ensemble

$$\mathcal{E}=\left\{M\in\mathcal{P}\;\middle|\;\left\|3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|\right\},$$

où $\mathcal{P}$ désigne le plan. **Indice :** transformer chaque somme vectorielle à l'aide des rappels, puis reconnaître un lieu géométrique. Les points équidistants de deux points distincts sont sur leur médiatrice.

Exercice 4 · Intersection de deux droites

Soit G le barycentre de $(A;2)$ et $(B;-3)$, avec $A\neq B$. Soient E et F tels que $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EF}$ et $E\notin(AB)$.

1) Montrer que G est le barycentre de $(E;-1)$ et $(F;2)$.

2) En déduire que (EF) et (AB) sont sécantes en un point que l'on déterminera.

Indice : écrire $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GF}$, puis utiliser l'alignement d'un barycentre de deux points avec ces points.