Série N°2 ★ Corrigé détaillé

Exercice 1 · Reconnaître le barycentre

1) Mise sous la forme caractéristique. Par Chasles, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GB} &\iff 2(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}) - 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \\ &\iff -\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ &\iff \boxed{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}}. \end{aligned}$$

Comme $1 + 1 + 2 = 4 \neq 0$, cette égalité prouve que

$$\boxed{G = \text{bar}\{(A;1),(B;1),(C;2)\}}.$$

Exercice 1 · Construire le point G

2) Construction par associativité. Soit J le milieu de $[AB]$. Alors

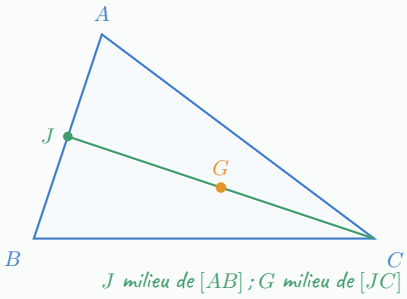
$$J = \text{bar}\{(A;1),(B;1)\}.$$

La somme des coefficients du groupe est $1 + 1 = 2 \neq 0$. Par associativité,

$$G = \text{bar}\{(J;2),(C;2)\} = \text{bar}\{(J;1),(C;1)\}.$$

Ainsi $\boxed{G \text{ est le milieu du segment } [JC]}$.

1) Construire le milieu J du segment $[AB]$.
2) Tracer le segment $[JC]$.
3) Placer son milieu : c'est le point G recherché.



J milieu de $[AB]$; G milieu de $[JC]$

Autre construction · Relation de position

La propriété caractéristique appliquée au point A donne

$$4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}.$$

Donc $\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$. On peut placer U et V tels que $\overrightarrow{AU} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AV} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, puis construire le parallélogramme $AUGV$.

Série N°2 ★ Corrigé détaillé

Exercice 2 · Trois regroupements pour le même point

On a $-2+3+3=4\neq 0$. Le barycentre G est donc bien défini.

1) Regrouper A et B. Puisque $-2+3=1\neq 0$ et $K=\text{bar}\{(A;-2),(B;3)\}$, l'associativité donne

$$\boxed{G=\text{bar}\{(K;1),(C;3)\}.}$$

Regrouper A et C. De même, $H=\text{bar}\{(A;-2),(C;3)\}$ et $-2+3=1$, donc

$$\boxed{G=\text{bar}\{(B;3),(H;1)\}.}$$

Regrouper B et C. Comme I est le milieu de $[BC]$,

$$I=\text{bar}\{(B;3),(C;3)\}.$$

Par associativité puis homogénéité (division des coefficients par 2),

$$G=\text{bar}\{(A;-2),(I;6)\}=\boxed{\text{bar}\{(A;-1),(I;3)\}}.$$

Exercice 2 · Concurrence des droites

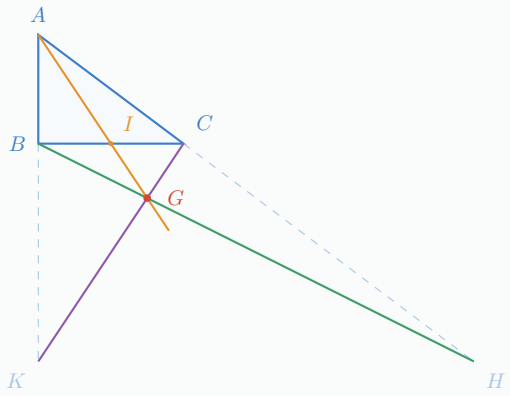
2) Appartenance aux trois droites. Un barycentre de deux points appartient à la droite qui les relie. Les trois écritures précédentes donnent donc

$$G\in(CK),\qquad G\in(BH),\qquad G\in(AI).$$

Ces droites sont bien définies : $K\in(AB)$ et $C\notin(AB)$, $H\in(AC)$ et $B\notin(AC)$, et $A\neq I$ puisque ABC est un triangle.

Les droites (CK) et (AI) sont distinctes : en effet $C\notin(AI)$, car sinon A appartiendrait à (BC), ce qui est impossible. Elles se coupent donc uniquement en G.

$$\boxed{(CK),\ (BH)\text{ et }(AI)\text{ sont concourantes au point }G.}$$



Pour retrouver le schéma

Les formules de position donnent

$$\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{AB},\qquad \overrightarrow{AH}=3\overrightarrow{AC},\qquad \overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AI}.$$

Ainsi K est au-delà de B, H au-delà de C, et G est au-delà de I sur la demi-droite $[AI)$.