Série N°2 ★ Barycentre et associativité

Rappels · Trois points pondérés

Si $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, alors

$$G=\text{bar}\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\} \iff \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$

Propriété caractéristique : pour tout point M,

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}.$$

Associativité : si $\alpha+\beta\neq 0$ et $K=\text{bar}\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$, alors

$$G=\text{bar}\{(K;\alpha+\beta),(C;\gamma)\}.$$

Homogénéité : multiplier tous les coefficients par un même réel non nul ne change pas le barycentre. Un barycentre de deux points distincts appartient à la droite qui les relie.

Exercice 1 · Construction du barycentre de trois points

Soit ABC un triangle et G un point tel que

$$\boxed{2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}.}$$

1) Montrer que G est le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;1)$ et $(C;2)$.
2) Construire le point G.

Indices : écrire $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}$ et utiliser $\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{GA}$. Pour la construction, regrouper les points A et B ou exprimer $\overrightarrow{AG}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 2 · Associativité et droites concourantes

Soit ABC un triangle et G le barycentre de $(A;-2)$, $(B;3)$ et $(C;3)$. Soient :

$$K=\text{bar}\{(A;-2),(B;3)\},\qquad H=\text{bar}\{(A;-2),(C;3)\},$$

et I le milieu du segment $[BC]$.

1) Montrer que

$$G=\text{bar}\{(K;1),(C;3)\},\qquad G=\text{bar}\{(B;3),(H;1)\},$$
$$G=\text{bar}\{(A;-1),(I;3)\}.$$

2) En déduire que les droites (CK), (BH) et (AI) sont concourantes en un point que l'on déterminera.

Indices : vérifier les sommes de coefficients ; regrouper d'abord $(A;-2)$ avec $(B;3)$, puis avec $(C;3)$. Enfin, utiliser $I=\text{bar}\{(B;3),(C;3)\}$ et simplifier les coefficients.

Méthode de construction · À retenir

Pour construire un barycentre de trois points : choisir un regroupement de deux points dont la somme des coefficients est non nulle, construire le barycentre intermédiaire, puis construire le barycentre des deux points restants.
Pour démontrer une concurrence : montrer qu'un **même point** appartient aux trois droites.