Série 1 · Révision · Séance 1

Exercice 1 — Domaines

Déterminer l'ensemble de définition D_f dans chaque cas. Écrire les conditions d'existence avant de donner le résultat sous forme d'intervalles.

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$; b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-4}$; c) $f(x) = \sqrt{3x-6}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5-2x}}$; e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$; f) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x+3)}$;

g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$; h) $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{4-x}$; i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$.

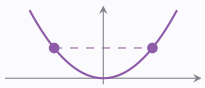
Exercice 2 — Parité

Pour chaque fonction : déterminer D_f, vérifier sa symétrie par rapport à 0, puis calculer $f(-x)$ et conclure (paire, impaire ou ni l'une ni l'autre).

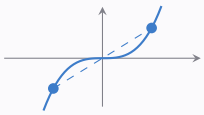
a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$; b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$; c) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$;

d) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$; e) $f(x) = x^2 + x$; f) $f(x) = \sqrt{x+1}$.

Lecture graphique : tracer deux points symétriques d'une courbe paire, puis d'une courbe impaire.



Symétrie d'axe (Oy)



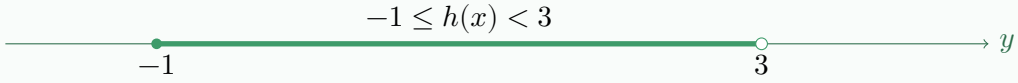
Symétrie de centre O

Exercice 3 — Encadrements

1) Soit $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$. a) Montrer que f est minorée par 0.
b) Montrer que f est majorée par 1. c) En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $h(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$ sur $[0, +\infty[$. Vérifier que $h(x) = 3 - \dfrac{4}{x+1}$.
a) Montrer que h est minorée par -1. b) Montrer que h est majorée par 3.
c) En déduire que h est bornée sur $[0, +\infty[$.

3) Soit $p(x) = (x-2)^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que p est minorée par 1. Cette valeur est-elle atteinte ? Montrer que p n'est pas majorée.



Exercice 4 — Approfondissement

1) On considère g définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$.
   a. Montrer que $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}$.
   b. En déduire que $0 < g(x) \le 1$. Conclure que g est bornée.

2) On considère f définie sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ par $f(x) = x - \sqrt{x+1}$.
   a. Montrer par l'absurde que f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}_+$: supposer $f(x) \le M$ pour tout $x \ge 0$ et utiliser $x = t^2 - 1$, $t \ge 1$.
   b. Montrer que $\sqrt{x+1} \le x + 1$ pour $x \ge 0$, puis que $f(x) \ge -1$. Préciser quand l'égalité est atteinte.