Exercice 1 ★ Découper le domaine

L'application étudiée

On considère l'application $F :]-1;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\boxed{F(t) = \frac{t+2}{\sqrt{t+1}}.}$$

1 · Injectivité

a) Montrer que, pour tout $t > -1$, $-\dfrac{t}{t+1} > -1$.

b) Vérifier que $F\left(-\dfrac{t}{t+1}\right) = F(t)$ pour tout $t > -1$.

c) L'application F est-elle injective ? Justifier par un contre-exemple si nécessaire.

2 · Image et surjectivité

a) Montrer que $F(]-1;+\infty[) = [2;+\infty[$. On pourra poser $z = \sqrt{t+1}$.

b) L'application F est-elle surjective sur $\mathbb{R}$? Justifier.

c) Déterminer $F^{-1}\left(\left[\dfrac{5}{2};+\infty\right[\right)$.

3 · Variations

a) Vérifier que, pour tous $a, b > -1$,

$$F(a)^2 - F(b)^2 = \frac{(a-b)(ab+a+b)}{(a+1)(b+1)}.$$

b) En déduire que F est strictement décroissante sur $]-1;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

4 · Restriction et réciproque

Soit G la restriction de F à $I = [0;+\infty[$.

a) Montrer que G réalise une bijection de I vers $J = [2;+\infty[$.

b) Déterminer l'expression de G^{-1} en précisant son domaine de définition.

5 · Composition

On considère $H :]0;\frac{1}{2}] \to [2;+\infty[$, $H(s) = \dfrac{1}{\sqrt{s-s^2}}$.

a) Vérifier que $H(s) = G\left(\dfrac{1}{s} - 2\right)$ pour tout $s \in]0;\frac{1}{2}]$.

b) En déduire que H est bijective, puis déterminer H^{-1}.

Exercice 2 ★ Changer d'échelle

L'application étudiée

On considère l'application $P :]2;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\boxed{P(x) = \frac{3(x-1)}{\sqrt{x-2}}.}$$

1 · Injectivité

Pour $x > 2$, on pose $T(x) = 2 + \dfrac{1}{x-2}$.

a) Montrer que $T(x) > 2$, puis vérifier que $P(T(x)) = P(x)$.

b) L'application P est-elle injective ? Justifier par un contre-exemple si nécessaire.

2 · Image et surjectivité

a) Montrer que $P(]2;+\infty[) = [6;+\infty[$. On pourra poser $z = \sqrt{x-2}$.

b) L'application P est-elle surjective sur $\mathbb{R}$? Justifier.

c) Déterminer $P^{-1}\left(\left[\dfrac{15}{2};+\infty\right[\right)$.

3 · Variations

a) Vérifier que, pour tous $a, b > 2$,

$$P(a)^2 - P(b)^2 = \frac{9(a-b)(ab-2a-2b+3)}{(a-2)(b-2)}.$$

b) En déduire que P est strictement décroissante sur $]2;3]$ et strictement croissante sur $[3;+\infty[$.

4 · Restriction et réciproque

Soit Q la restriction de P à $K = [3;+\infty[$.

a) Montrer que Q réalise une bijection de K vers $L = [6;+\infty[$.

b) Déterminer l'expression de Q^{-1} en précisant son domaine de définition.

5 · Composition

On considère $R :]0;\tfrac{1}{2}] \to [6;+\infty[$, $R(s) = \dfrac{3}{\sqrt{s-s^2}}$.

a) Vérifier que $R(s) = Q\left(1 + \dfrac{1}{s}\right)$ pour tout $s \in]0;\tfrac{1}{2}]$.

b) En déduire que R est bijective, puis déterminer R^{-1}.