Généralités sur les fonctions

Cours détaillé • 1 BAC Sciences Mathématiques • Définitions, méthodes, exemples et schémas

1. Fonction et ensemble de définition

Une fonction numérique f associe à chaque réel x de son domaine un unique réel, appelé son image et noté $f(x)$. On écrit $f : D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$. Le domaine D_f est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'expression a un sens.

Expression	Condition à imposer	Exemple
Polynôme	aucune restriction	$2x^2 - 3x + 1$: $D_f = \mathbb{R}$
Fraction $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$	$\dfrac{2x+1}{x-3}$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
Racine $\sqrt{u(x)}$	$u(x) \geq 0$	$\sqrt{2x-5}$: $2x-5 \geq 0$, donc $D_f = [\frac{5}{2}, +\infty[$
Racine au dénominateur $\dfrac{1}{\sqrt{u(x)}}$	$u(x) > 0$ (le dénominateur ne peut pas être nul)	$\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$: $D_f =]-2, +\infty[$

Méthode : déterminer un domaine

Repérer les dénominateurs et les racines, écrire toutes les conditions, puis les résoudre ensemble.

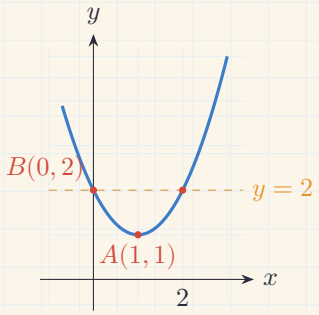
Exemple : $h(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-3}$. Il faut $x - 1 \geq 0$ et $x - 3 \neq 0$. Ainsi $\boxed{D_h = [1, 3[\cup]3, +\infty[}$.

2. Courbe, images et antécédents

Dans un repère, la courbe représentative de f est $C_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$. Pour placer un point, choisir une abscisse a, calculer $f(a)$, puis placer $M(a, f(a))$.

$$M(a, b) \in C_f \iff a \in D_f \text{ et } b = f(a).$$

Lire une image : l'image de a est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse a.
Lire les antécédents de k : ce sont les abscisses des intersections de C_f avec la droite horizontale $y = k$. Il peut y en avoir zéro, une ou plusieurs.



Exemple de lecture

Pour $f(x) = (x-1)^2 + 1$, on lit $f(0) = 2$ et $f(1) = 1$. La droite $y = 2$ coupe la courbe en deux points : les antécédents de 2 sont 0 et 2. Sur $[0, 2]$, les valeurs de f vont de 1 à 2, donc $f([0, 2]) = [1, 2]$.

Symétries et répétitions

Généralités sur les fonctions • Parité et périodicité

3. Parité : vérifier le domaine avant le calcul

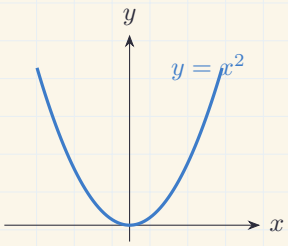
Pour parler de parité, le domaine doit être symétrique par rapport à 0 : si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$.

Fonction paire

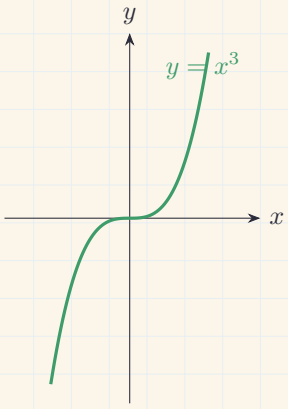
f est paire si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Exemple : $f(x) = x^2 + 2$; $D_f = \mathbb{R}$ et $f(-x) = (-x)^2 + 2 = f(x)$.

Fonction impaire

f est impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D_f$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine O. Exemple : $g(x) = x^3 - 2x$; $D_g = \mathbb{R}$ et $g(-x) = -x^3 + 2x = -g(x)$.



Paire : axe Oy



Impaire : centre O

Erreurs fréquentes

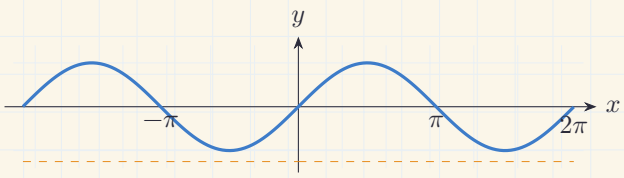
Ne pas conclure « paire » ou « impaire » sans vérifier que D_f est symétrique. Une fonction peut n'être ni paire ni impaire; par exemple $f(x) = x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

4. Périodicité

Un réel $T > 0$ est une période de f si, pour tout $x \in D_f$, $x + T \in D_f$ et $f(x + T) = f(x)$. La plus petite période positive, lorsqu'elle existe, est la période fondamentale. Le motif de la courbe se répète par translation horizontale de longueur T.

Exemple

Pour $f(x) = \sin x$, la période fondamentale est 2π, car $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Les nombres 4π, 6π, etc. sont aussi des périodes, mais ne sont pas fondamentales.



Pour étudier une fonction périodique, on peut d'abord l'étudier sur un intervalle de longueur T, puis recopier le motif.

Signe, comparaison et bornes

Généralités sur les fonctions • Lire et comparer les valeurs

5. Signe et comparaison

Sur une partie $I \subset D_f$, f est positive si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$; elle est négative si $f(x) \leq 0$. Les zéros de f séparent souvent les intervalles où son signe change.

Exemple : étudier le signe

Soit $q(x) = (x-1)^2 - 4 = (x+1)(x-3)$. Ses zéros sont -1 et 3. Le coefficient du terme de degré 2 est positif, donc la parabole est tournée vers le haut : q est positive à l'extérieur des racines et négative entre elles.

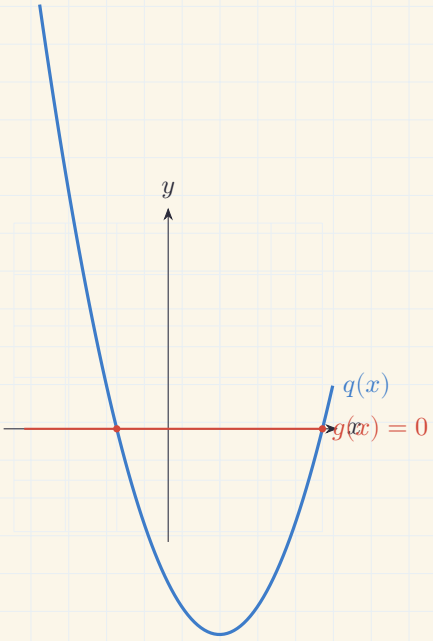
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi $q(x) \leq 0$ équivaut à $x \in [-1, 3]$.

Deux fonctions f et g se comparent en étudiant le signe de $f - g$:

$$f(x) \geq g(x) \iff f(x) - g(x) \geq 0.$$

Graphiquement, $f \geq g$ sur I signifie que C_f se trouve au-dessus de C_g sur les abscisses de I.



6. Majorée, minorée, bornée

Sur $I \subset D_f$:

- f est majorée par M si $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$;
- f est minorée par m si $m \leq f(x)$ pour tout $x \in I$;
- f est bornée si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire $m \leq f(x) \leq M$.

Exemple et nuance importante

Pour $q(x) = (x-1)^2 - 4$ sur $[0, 2]$, le sommet donne $q(1) = -4$ et aux extrémités $q(0) = q(2) = -3$. Donc $-4 \leq q(x) \leq -3$: minimum -4, maximum -3.
Un majorant n'est pas forcément un maximum : $r(x) = x$ sur $[0, 1[$ vérifie $r(x) < 1$, donc 1 est un majorant, mais aucune valeur de r n'est égale à 1.

Variations et extremums

Généralités sur les fonctions • Sens de variation, tableau et lecture

7. Croissance et décroissance

Sur un intervalle I, f est croissante si $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$. Elle est strictement croissante si $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$. Pour une fonction décroissante, les inégalités sur les images sont inversées. Une fonction constante conserve la même valeur sur tout l'intervalle.

Taux de variation : outil de comparaison

Pour $a \neq b$, le taux de variation entre a et b est

$$T_{a,b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Si $a < b$, un taux positif indique une hausse entre ces deux abscisses; un taux négatif indique une baisse. Pour conclure qu'une fonction est monotone sur tout un intervalle, on doit établir le signe du taux pour tous les couples $a < b$ de cet intervalle.

Exemple détaillé : une fonction croissante

$f(x) = \sqrt{x+1} + x$ sur $[0, +\infty[$. Prenons $a > b \geq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{f(a) - f(b)}{a - b} &= 1 + \frac{\sqrt{a+1} - \sqrt{b+1}}{a - b} \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1}} > 0. \end{aligned}$$

Donc $f(a) > f(b)$ lorsque $a > b$: f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

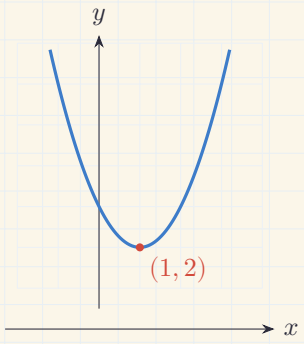
8. Extremums et tableau de variation

Un maximum absolu $M = f(a)$ vérifie $f(x) \leq M$ pour tout x du domaine. Un minimum absolu $m = f(b)$ vérifie $f(x) \geq m$ partout. Un extremum relatif ne compare les valeurs que dans un voisinage du point. Les extremums absolus sont donc les plus grands ou plus petits résultats sur tout le domaine.

Exemple : minimum

$u(x) = (x-1)^2 + 2$. Comme un carré est positif, $u(x) \geq 2$, avec égalité pour $x = 1$. Le minimum absolu est 2.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$



Fonctions usuelles

Généralités sur les fonctions • Formes et propriétés à reconnaître

9. Modèles de base

Fonction	Domaine et variation	Repère utile
$f(x) = ax + b$	$D_f = \mathbb{R}$. Croissante si $a > 0$, décroissante si $a < 0$, constante si $a = 0$.	Zéro si $a \neq 0$: $x = -b/a$. La droite coupe l'axe vertical en b.
$f(x) = \sqrt{ax + b}$	Imposer $ax + b \geq 0$. Croissante si $a > 0$, décroissante si $a < 0$.	Le point de départ est $(-b/a, 0)$ lorsque $a \neq 0$.
$f(x) = ax^3$	$D_f = \mathbb{R}$. Croissante si $a > 0$, décroissante si $a < 0$.	La courbe passe par O et garde une forme en S.
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$D_f = \mathbb{R}$. Étudier le sommet et le signe de a.	Parabole; axe vertical $x = \alpha$.

La parabole : forme canonique

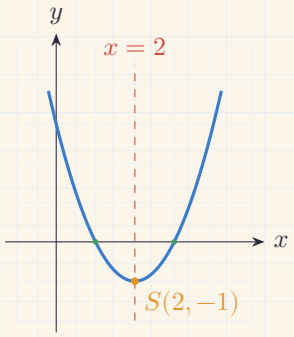
Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, on écrit

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \qquad \alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = f(\alpha).$$

Le sommet est $S(\alpha, \beta)$ et l'axe de symétrie est $x = \alpha$. Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut et possède le minimum β. Si $a < 0$, elle est tournée vers le bas et possède le maximum β.

Exemple : retrouver le sommet

$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$. Le sommet est $S(2, -1)$, l'axe est $x = 2$, et le minimum vaut -1. Les racines 1 et 3 se lisent aussi à partir de $(x - 2)^2 - 1 = 0$.



Hyperboles et compositions

Généralités sur les fonctions • Lire les asymptotes et combiner les variations

10. Fonction homographique

Une fonction homographique s'écrit $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $c \neq 0$. Son domaine exclut la valeur qui annule le dénominateur : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$.

Réécriture et asymptotes

Si $ad - bc \neq 0$, on peut écrire

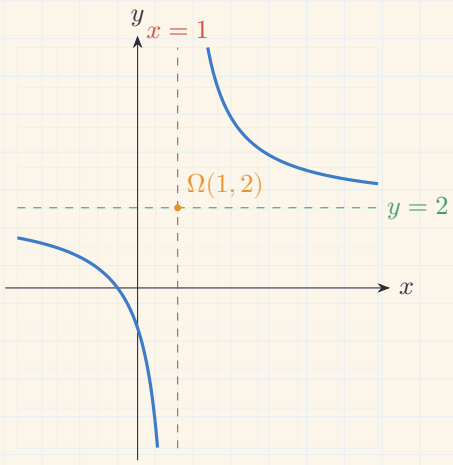
$$f(x) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2\left(x + \frac{d}{c}\right)}.$$

La courbe est une hyperbole de centre $\Omega(-d/c, a/c)$ et ses asymptotes sont $x = -d/c$ et $y = a/c$. La valeur interdite donne l'asymptote verticale; le rapport des coefficients de x donne l'asymptote horizontale.

Exemple guidé

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}.$$

Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, les asymptotes sont $x = 1$ et $y = 2$, et leur intersection $\Omega(1, 2)$ est le centre de l'hyperbole. Pour $x < 1$, $3/(x-1) < 0$ donc la branche est sous $y = 2$; pour $x > 1$, elle est au-dessus.



Compositions et variations

Généralités sur les fonctions • Enchaîner deux fonctions

11. Composée de deux fonctions

La composée de f puis g se note $g \circ f$ et vérifie $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. On commence par appliquer f, puis on applique g au résultat. Son domaine est

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}.$$

Exemple : attention au domaine et à l'ordre

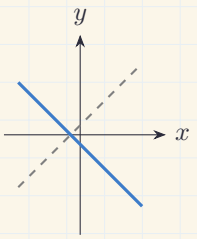
$f(x) = x^2$ et $g(t) = \sqrt{t}$. Comme $f(x) \geq 0$, $g \circ f$ est définie pour tout réel et $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x|$. En revanche, $f \circ g$ n'a pas le même domaine : il faut d'abord que $x \geq 0$. En général, $g \circ f \neq f \circ g$.

Si $f(I) \subset J$, alors les sens de variation se combinent ainsi :

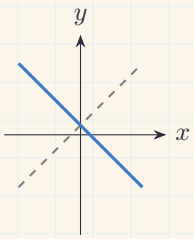
f sur I	g sur J	$g \circ f$ sur I
croissante	croissante	croissante
décroissante	décroissante	croissante
croissante	décroissante	décroissante
décroissante	croissante	décroissante

12. Effets des transformations usuelles

À partir de la courbe C_f, les courbes ci-dessous s'obtiennent par une symétrie ou par une conservation d'une partie de la courbe.



$-f(x)$: miroir sur Ox



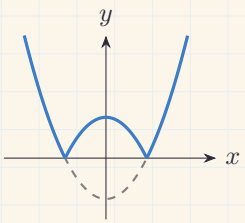
$f(-x)$: miroir sur Oy

Valeur absolue : $|f(x)|$

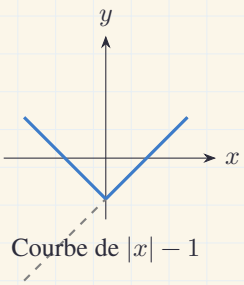
On garde les parties de C_f situées au-dessus de l'axe Ox. Les morceaux sous l'axe sont réfléchis au-dessus. Exemple : pour $f(x) = x^2 - 1$, la partie entre -1 et 1 remonte par symétrie.

Valeur absolue de la variable : $f(|x|)$

On conserve la partie de C_f pour $x \geq 0$, puis on la reproduit par symétrie par rapport à l'axe Oy. La courbe obtenue est toujours celle d'une fonction paire.



Courbe de $|x^2 - 1|$



Courbe de $|x| - 1$

Fonction réciproque

Généralités sur les fonctions • Complément ciblé Sciences Mathématiques

13. Fonction réciproque d'une bijection

Soit f définie sur un intervalle I. Si f est strictement monotone et continue sur I, elle établit une bijection de I sur son image $J = f(I)$. Chaque réel $y \in J$ possède alors un unique antécédent $x \in I$.

Définition et domaine

La fonction réciproque f^{-1} est définie sur $J = f(I)$ et vérifie

$$f^{-1} : J \longrightarrow I, \qquad f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Ainsi, $D_{f^{-1}} = f(I)$ et $f^{-1}(J) = I$. Attention : f^{-1} désigne la fonction réciproque, et non la fonction $1/f$.

Méthode pour calculer f^{-1}

Pour déterminer l'expression de la réciproque : poser $y = f(x)$, résoudre cette égalité par rapport à x, puis échanger les noms des variables. Enfin, préciser le domaine de f^{-1}, qui est l'image de f.

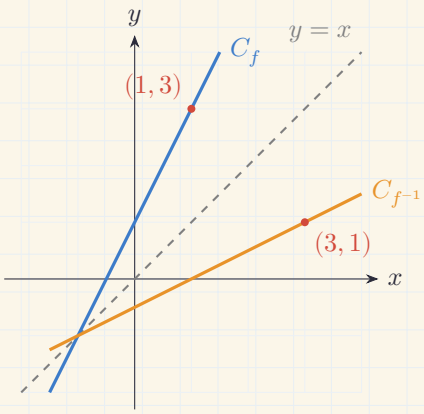
Exemple détaillé : $f(x) = 2x + 1$

La fonction affine f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Posons $y = 2x + 1$. Alors $2x = y - 1$, d'où $x = \dfrac{y-1}{2}$. Par conséquent,

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}, \qquad D_{f^{-1}} = \mathbb{R}.$$

Vérification : $f^{-1}(f(x)) = \dfrac{(2x+1)-1}{2} = x$ et $f(f^{-1}(x)) = 2\dfrac{x-1}{2} + 1 = x$.

Les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$: les coordonnées de chaque point s'échangent, $(a, b) \leftrightarrow (b, a)$.



À retenir

Avant d'écrire f^{-1}, vérifier que f est bijective sur l'intervalle choisi. Si elle n'est pas injective sur tout son domaine, on peut parfois restreindre son domaine à un intervalle où elle est strictement monotone.