Branches infinies

Schéma-bilan : méthode pour déterminer l'allure et les asymptotes d'une courbe.

Méthode de décision

1. Au voisinage d'un réel a

Étudier séparément $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

Si l'une des limites est infinie :
asymptote verticale $x = a$.
Lire le signe pour orienter chaque branche.

2. Quand $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Si la limite vaut $\ell \in \mathbb{R}$:
asymptote horizontale $y = \ell$.
Position avec le signe de $f(x) - \ell$.

3. Si $f(x)$ diverge à l'infini

Calculer $L = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

- $L = 0$ → $L = 0$ — Direction Ox : branche parabolique si $f(x) \to \pm\infty$.
- $L = a \neq 0$ → $L = a \in \mathbb{R}^*$ — Calculer ensuite $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax)$.
  - b fini → Si $b \in \mathbb{R}$: **asymptote oblique $y = ax + b$.** Position avec $f(x) - (ax + b)$.
  - b infini → Si cette limite vaut $\pm\infty$: **branche parabolique** de direction $y = ax$.
- $|L| \to \infty$ → $|L| \to +\infty$ — Direction Oy : branche parabolique.

À ne pas oublier Refaire l'étude séparément en $+\infty$ et en $-\infty$.
Position relative Pour une asymptote $y = g(x)$, étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
Lecture du schema Une direction parabolique décrit l'orientation de la branche ; ce n'est pas une asymptote.

S'entraîner sur les branches infinies

Pour chaque fonction : préciser le domaine utile, calculer les limites demandées, conclure et justifier par un schéma lisible.

Exercice 2 · Asymptotes horizontales

Déterminer les asymptotes horizontales éventuelles aux infinis, puis étudier la position de la courbe par rapport à chacune.

a) $f(x) = \dfrac{3x-1}{1+2x}$.

b) $f(x) = \dfrac{3-2x^2}{x^2+3}$.

c) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^4+5}$.

d) $f(x) = \sqrt{x^2-x+1} - x + 2$.

e) $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{(x+1)^2}$.

f) $f(x) = x^3 - 5x + 2$.

g) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$: vérifier d'abord si une limite à l'infini a un sens.

Exercice 3 · Asymptotes verticales

Étudier les limites à gauche et à droite des valeurs interdites. Une valeur exclue ne donne pas toujours une asymptote : vérifier les limites.

a) $f(x) = \dfrac{-2x+5}{x+3}$.

b) $f(x) = \dfrac{3x-7}{x^2-1}$.

c) $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$.

d) $f(x) = \dfrac{4x+1}{\sqrt{x}-2}$.

e) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

f) $f(x) = \sqrt{x} - x + 1$: examiner le bord du domaine.

Exercice 4 · Asymptotes obliques

Pour chaque fonction, déterminer a et b si $y = ax + b$ est une asymptote. Étudier ensuite le signe de $f(x) - (ax+b)$.

a) $f(x) = 3x + 1 - \dfrac{5}{x^2+1}$.

b) $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x^2+2}$.

c) $f(x) = -x + 2 - \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$, pour $x \geq 0$.

d) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x+1}$.

e) $f(x) = \sqrt{-x^2+x+2}$: son domaine est-il non borné ?

Exercice 5 · Direction de l'axe des abscisses

Étudier la branche en $+\infty$ (et en $-\infty$ lorsque le domaine le permet). Tester $f(x) \to \pm\infty$ et $f(x)/x \to 0$, puis faire un croquis.

a) $f(x) = 3\sqrt{x} - 2$.

b) $f(x) = 1 - \sqrt{2-x}$.

c) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+2}$, pour $x \geq 1$.

Exercice 6 · Direction de l'axe des ordonnées

Vérifier si $|f(x)/x| \to +\infty$ à l'infini. Préciser le côté concerné et représenter l'allure de la branche.

a) $f(x) = -2x^3 + x^2 - 3x + 1$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x+1}$.

c) $f(x) = \sqrt{x^3+1}$, pour $x \to +\infty$.

d) $f(x) = -3x^2 + 5 - \sqrt{x^2+1}$.

Exercice 7 · Direction d'une droite $y = ax$

Déterminer $a = \lim f(x)/x$, puis étudier $f(x) - ax$. Distinguer asymptote oblique et branche parabolique de direction $y = ax$.

a) $f(x) = \sqrt{2x+1} + 3x$.

b) $f(x) = -2x - 3\sqrt{x-4}$.

c) $f(x) = \sqrt{x^2-x+3}$.

d) $f(x) = x + \dfrac{2x}{\sqrt{x+3}}$.

e) $f(x) = 2 - \sqrt{3x+1}$: comparer sa croissance à celle de x.

Exercice 8 · Synthèse : choisir la bonne étude

Pour chaque cas, compléter un tableau à trois lignes : limite de f, limite de f/x, limite de $f - ax$ lorsque nécessaire. Donner la conclusion et un croquis annoté.

a) $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, aux deux infinis.

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$, au voisinage de 1 puis aux infinis.

c) $f(x) = \sqrt{3x+4} - \sqrt{3x}$, en $+\infty$.

Exercice 8 · Lecture des branches

Pour chacun des trois cas, placer les asymptotes ou la droite de direction en pointillés, indiquer le côté où se trouve la courbe lorsque c'est demandé, puis dessiner une branche compatible avec les limites :

$f(x) \to 2$ et $f(x) - 2 > 0$
Asymptote : _____

$f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 1^-$
Asymptote : _____

$f(x)/x \to -1$ et $f(x) + x \to -\infty$
Type de branche : _____

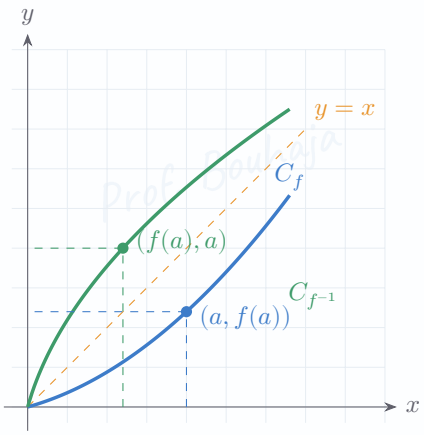
Dérivée de la fonction réciproque

Méthode et exercices · déterminer d'abord l'image $y_0 = f(a)$, puis calculer $(f^{-1})'(y_0)$.

La méthode à appliquer à chaque question

Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I. Si f est dérivable en $a \in I$ et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(a)$ et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(a)} \qquad (\text{car } f^{-1}(y_0) = a)\,.$$



Les deux points se correspondent par symétrie par rapport à $y = x$; les pentes tangentes sont réciproques.

Exercice 9 · Calculer l'image, puis la dérivée inverse

Pour chaque fonction, vérifier la stricte monotonie sur l'intervalle indiqué. Puis suivre l'ordre : calculer $y_0 = f(a)$; calculer $f'(a)$; donner $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(a)$. Justifier que $f'(a) \neq 0$.

a) $f(x) = x^3 + x$ sur $\mathbb{R}$, avec $a = 1$.

b) $g(x) = x^2 + 2x$ sur $[0, +\infty[$, avec $a = 1$.

c) $h(x) = 2x^3 + 1$ sur $\mathbb{R}$, avec $a = -1$.

d) $u(x) = \dfrac{1}{x+1}$ sur $]0, +\infty[$, avec $a = 1$.

e) $w(x) = x^2 + 1$ sur $[0, +\infty[$, avec $a = 2$.

Exercice 10 · Retrouver le point de départ

On sait que $f(x) = x^3 + 3x$ sur $\mathbb{R}$.

a) Calculer $f(1)$ et en déduire $f^{-1}(4)$.

b) Calculer $(f^{-1})'(4)$.

c) Refaire le calcul pour $a = 2$: déterminer $f(2)$, puis $(f^{-1})'(f(2))$.

d) Expliquer pourquoi il n'est pas nécessaire de trouver une expression de f^{-1}.

Application flash · image puis réciproque

Pour chaque ligne, calculer d'abord $f^{-1}(f(a))$, puis $(f^{-1})'(f(a))$.

a) f croissante, $f(3) = 7$, $f'(3) = 2$.

b) f décroissante, $f(-2) = 0$, $f'(-2) = -5$.

Exercice 11 · Fonction rationnelle croissante

Soit $v(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ définie sur $]-1, +\infty[$.

a) Étudier le sens de variation de v et préciser son image.

b) Calculer $v(1)$, puis $v'(1)$.

c) En déduire $(v^{-1})'(v(1))$.

d) Interpréter le signe obtenu : comparer les sens de variation de v et de sa réciproque.

Exercice 12 · Vrai ou faux ? Justifier

Dans chaque affirmation, f est continue et strictement monotone sur I.

a) Si $f(2) = 5$ et $f'(2) = 4$, alors $(f^{-1})'(5) = \frac{1}{4}$.

b) Si $f(a) = b$ et $f'(a) = 0$, on peut appliquer la formule et conclure que $(f^{-1})'(b) = 0$.

c) Si f est décroissante et dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, alors $(f^{-1})'(f(a)) < 0$.

d) La formule nécessite de calculer une expression explicite de f^{-1}.

Rédaction attendue

Étape 1 : $y_0 = f(a) = \ldots$ donc $f^{-1}(y_0) = a$.
Étape 2 : $f'(x) = \ldots$, donc $f'(a) = \ldots \neq 0$.
Conclusion : $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(a)} = \ldots$.