Dérivation et étude des fonctions

Cours de 2 BAC Sciences Expérimentales • Définitions, propriétés, méthodes et applications guidées

Objectifs du chapitre

Calculer une dérivée, interpréter un nombre dérivé, étudier les variations et la forme d'une courbe, puis mobiliser ces outils dans une étude complète. Les résultats annoncés s'appliquent sur les intervalles où les fonctions considérées sont définies et dérivables.

1. Nombre dérivé et dérivabilité en un point

Soit f définie au voisinage de a. Pour $x \neq a$, le quotient

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

est le taux d'accroissement de f entre a et x.

Définition et écriture avec h

f est dérivable en a si la limite suivante existe et est finie :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

En posant $h=x-a$, on obtient l'écriture équivalente

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Application guidée : $f(x)=x^2$ en $a=2$

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{x^2-4}{x-2}=x+2 \quad (x\neq 2), \qquad f'(2)=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

Le nombre dérivé vaut donc 4 : c'est la pente de la tangente au point d'abscisse 2.

Dérivées à droite et à gauche

Sur un intervalle ouvert contenant a, la dérivée à droite et la dérivée à gauche sont définies par les limites unilatérales du même taux d'accroissement. La fonction est dérivable en a si et seulement si ces deux limites existent, sont finies et sont égales.

Point anguleux : $f(x)=|x|$ en 0

f est continue en 0. Pourtant,

$$f'_d(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1, \qquad f'_g(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1.$$

Les dérivées unilatérales sont différentes : f n'est pas dérivable en 0 et sa courbe présente un point anguleux.

Dérivabilité et continuité

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a. La réciproque est fausse : $|x|$ est continue en 0, mais n'y est pas dérivable.

2. Tangente et règles de dérivation

Du calcul algébrique à la lecture géométrique

Tangente en $A(a, f(a))$

Si f est dérivable en a, la tangente à C_f en A a pour équation

$$\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}.$$

La pente est $f'(a)$. Au voisinage de a, $f(x)$ est approchée par $f(a) + f'(a)(x - a)$.

Exemple : tangente à x^2 en $x = 1$

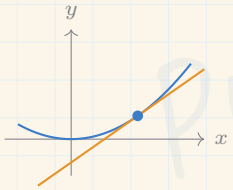
$f(1) = 1$ et $f'(1) = 2$, donc $T : y = 2(x - 1) + 1$, soit $\boxed{y = 2x - 1}$.

Lire les tangentes et demi-tangentes

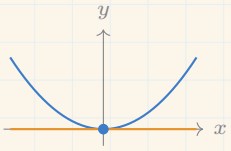
Cas à distinguer

Si $f'_g(a) = f'_d(a)$, la courbe a une tangente unique. Si les deux nombres dérivés existent mais sont différents, elle a deux demi-tangentes et un point anguleux. Si un taux d'accroissement unilatéral tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, la courbe a une demi-tangente verticale : $x = a$.

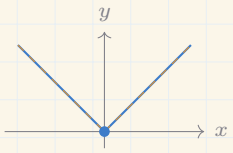
Tangente oblique : $f(x) = x^2$ en 1



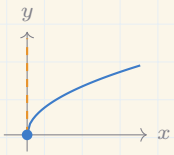
Tangente horizontale : $f(x) = x^2$ en 0



Point anguleux : $f(x) = |x|$ en 0



Demi-tangente verticale : $f(x) = \sqrt{x}$ en 0



Équations des demi-tangentes

Si les dérivées unilatérales sont finies, les demi-tangentes en $A(a, f(a))$ sont

$$(T_d) : \ y = f'_d(a)(x - a) + f(a), \ x \geq a; \qquad (T_g) : \ y = f'_g(a)(x - a) + f(a), \ x \leq a.$$

Si $f'_d(a) = f'_g(a)$, elles se confondent avec la tangente. Sinon, elles forment un point anguleux.

3. Dérivées usuelles et composition

Formules, opérations et dérivée d'une fonction composée

Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Conditions
c	0	$x \in \mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$x \neq 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\cos x \neq 0$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sqrt[n]{x}$	$\dfrac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$	sur tout intervalle où la racine et la formule sont définies, avec dérivée finie

Opérations, composition et fonction réciproque

Si u, v sont dérivables (et $v \neq 0$ pour le quotient) :

$$(u+v)' = u' + v', \quad (uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad (u \circ v)' = (u' \circ v)\, v'.$$

Application : dériver $g(x) = (3x^2+1)^5$

Posons $u(x) = 3x^2 + 1$. Alors $u'(x) = 6x$ et $g'(x) = 5u(x)^4 u'(x)$. Ainsi

$$\boxed{g'(x) = 30x(3x^2+1)^4}.$$

Fonction réciproque. Si f est bijective et dérivable en x_0, avec $f'(x_0) \neq 0$, alors $(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Application : quotient

Pour $r(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$, $x \neq 1$: $r'(x) = \dfrac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)^2 - 2}{(x-1)^2}$.

Application : dérivée de la réciproque

Pour $f(x) = x^3 + x$, $f(1) = 2$ et $f'(1) = 4$. Donc $\boxed{(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{4}}$.

4. Variations et extremums

Relier le signe de f' au comportement de la courbe

Théorème de monotonie

Soit f dérivable sur un intervalle I. Si $f'(x) \geq 0$ sur I, alors f est croissante sur I ; si $f'(x) \leq 0$, elle est décroissante. Si les inégalités sont strictes sur I, la monotonie est stricte. Si $f' = 0$ sur I, f est constante.

Méthode pour dresser un tableau de variations

- Déterminer l'intervalle d'étude et calculer $f'(x)$.
- Factoriser f' lorsque c'est possible, puis étudier son signe.
- Repérer les zéros de f' et les points où f' n'existe pas.
- Déduire les sens de variation et calculer les valeurs de f aux bornes utiles.

Extremum et changement de signe

Si f admet un extremum local en a et est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$ (condition nécessaire, pas suffisante). Si f' passe de $+$ à $-$ en a, f admet un maximum local ; de $-$ à $+$, un minimum local.

Application : $f(x) = x^3 - 3x$

$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$. Le signe de f' est positif sur $]-\infty, -1[$, négatif sur $]-1, 1[$, puis positif sur $]1, +\infty[$. Donc $f(-1) = 2$ est un maximum local et $f(1) = -2$ un minimum local.

Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Rolle

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Accroissements finis (TAF)

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Si $m \leq f'(x) \leq M$ sur $]a, b[$ avec $a < b$, alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

À quoi servent-ils ?

Rolle garantit une tangente horizontale sous ses hypothèses. Le TAF compare une variation moyenne à une valeur de la dérivée et permet notamment de prouver des inégalités ou l'unicité d'une solution.

5. Dérivée seconde et forme de la courbe

Convexité, concavité et point d'inflexion

Si f est deux fois dérivable sur un intervalle I, sa dérivée seconde est $f'' = (f')'$.

Théorème de convexité

Si $f''(x) \geq 0$ sur I, la courbe C_f est convexe sur I (elle est au-dessus de ses tangentes). Si $f''(x) \leq 0$, elle est concave (au-dessous de ses tangentes).

Point d'inflexion

Un point $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion lorsque la courbe change de convexité en traversant A. En pratique, on repère un changement de signe de f'' en a ; l'annulation seule de $f''(a)$ ne suffit pas.

Exemple : $f(x) = x^3$

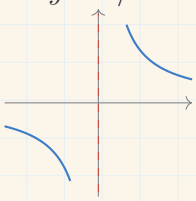
$f''(x) = 6x$ change de signe en 0. La courbe change de concavité en $A(0,0)$: c'est un point d'inflexion. En revanche, pour x^2, $f'' = 2 > 0$ et la courbe est convexe sur $\mathbb{R}$.

Asymptotes et branches infinies

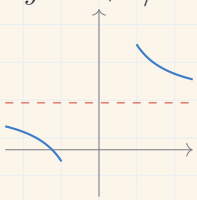
Asymptotes

Verticale : si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, alors $x = a$ est une asymptote verticale.
Horizontale : si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors $y = \ell$ est une asymptote horizontale à cette extrémité.
Oblique : $y = mx + p$ ($m \neq 0$) est asymptote au voisinage de $\pm\infty$ si $f(x) - (mx + p) \to 0$.

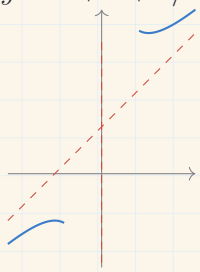
Verticale
$y = 1/x$



Horizontale
$y = 1 + 1/x$



Oblique
$y = x + 1 + 1/x$



Reconnaître une branche infinie

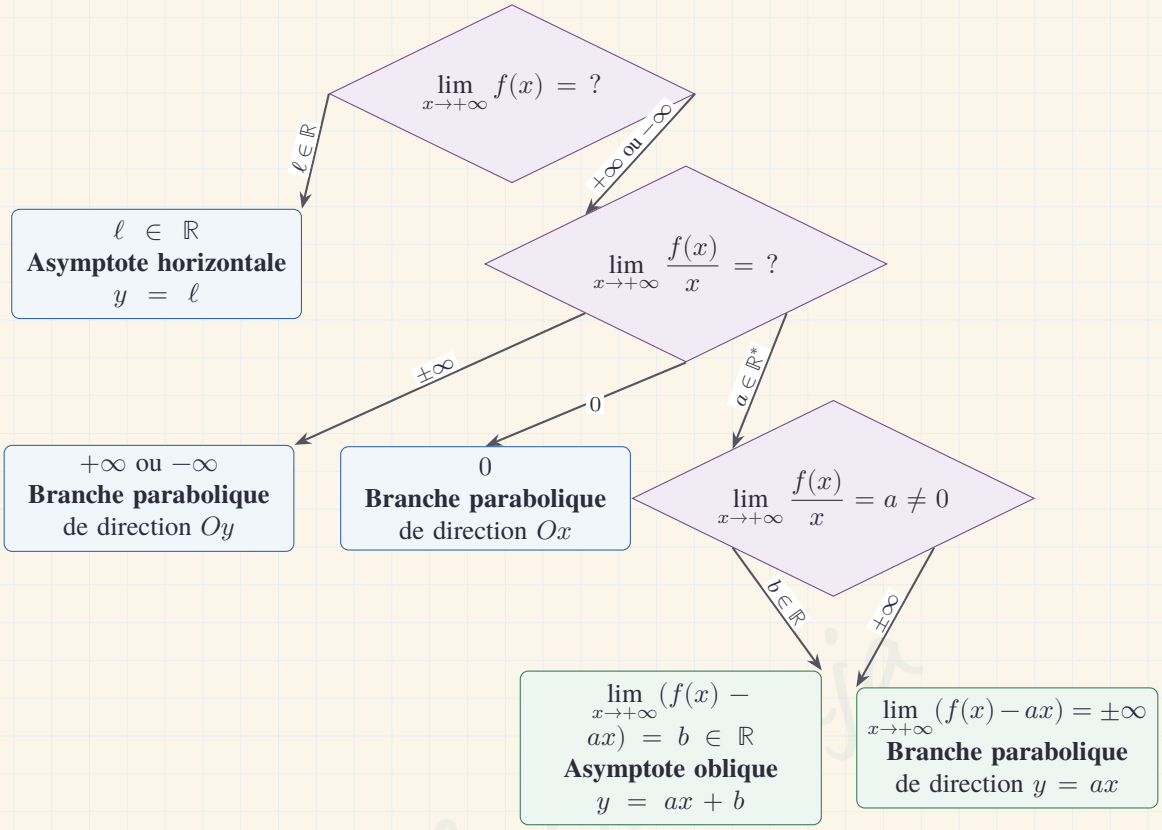
Les courbes $1/x$, $1+1/x$ et $x+1+1/x$ illustrent respectivement une asymptote verticale, horizontale et oblique. Une branche peut aussi être parabolique : à l'infini, $f(x) \to \pm\infty$ et $f(x)/x \to \pm\infty$ (direction de Oy), ou $f(x)/x \to 0$ (direction de Ox). Vérifier les limites à chaque extrémité séparément.

Position relative à une droite

Comparer la courbe à $y = g(x)$ revient à étudier le signe de $f(x) - g(x)$: positif, la courbe est au-dessus ; négatif, elle est au-dessous ; nul, elles se coupent.

6. Arbre de décision · branches infinies

Classer la branche à $+\infty$ en étudiant les limites dans cet ordre



Cas d'une borne finie : asymptote verticale

Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, alors la droite $x = a$ est une asymptote verticale. Faire séparément le calcul à gauche et à droite.

Quatre exemples pour lire l'arbre

$f(x) = x^2$

$f(x) \to +\infty$ et $f(x)/x = x \to +\infty$: branche parabolique de direction Oy.

$f(x) = \sqrt{x}$

À $+\infty$, $f(x) \to +\infty$ et $f(x)/x = 1/\sqrt{x} \to 0$: direction Ox.

$f(x) = x + \sqrt{x}$

$f(x)/x \to 1$, mais $f(x) - x = \sqrt{x} \to +\infty$: direction parabolique $y = x$.

$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

$f(x) = x + 1 + 2/(x-1)$: asymptote oblique $y = x + 1$ à $+\infty$ et $-\infty$.

À ne pas oublier

Reprendre l'arbre séparément à $-\infty$. Une limite finie de $f(x)$ donne une asymptote horizontale ; le quotient $f(x)/x$ ne s'étudie qu'après avoir vérifié que $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

7. Méthode d'une étude complète

Une démarche organisée pour construire une courbe fiable

Ordre conseillé

- Domaine de définition ; si D_f est symétrique, tester la parité ($f(-x) = f(x)$ ou $f(-x) = -f(x)$) pour réduire l'intervalle d'étude.
- Limites aux bornes du domaine ; asymptotes verticales, horizontales ou obliques.
- Dérivabilité, calcul de f', signe de f' et tableau de variations.
- Tangentes demandées, intersections avec les axes et position relative à une droite.
- Si nécessaire, calcul de f'', convexité, concavité et points d'inflexion.
- Tracé : reporter les asymptotes, points remarquables et variations en respectant les échelles.

Contrôles avant de conclure

- Une formule de dérivée n'est utilisée que sur son domaine de validité.
- Les valeurs interdites ne figurent pas dans le domaine ; les limites à gauche et à droite restent distinctes.
- Pour un extremum intérieur dérivable, vérifier un changement de signe de f' plutôt que seulement $f'(a) = 0$.
- Pour un point d'inflexion, vérifier le changement de convexité, pas seulement $f''(a) = 0$.
- Les coordonnées d'un point de la courbe sont $(a, f(a))$; une tangente doit passer par ce point.

Application de synthèse : $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

Pour $x \neq 1$, la division donne $g(x) = x+1+\dfrac{2}{x-1}$. Ainsi $x = 1$ est asymptote verticale et $y = x+1$ asymptote oblique, car $g(x) - (x+1) \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$.

$g'(x) = 1 - \dfrac{2}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)^2 - 2}{(x-1)^2}$. Les points critiques sont $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Le dénominateur étant positif sur le domaine, le signe de g' est celui de $(x-1)^2 - 2$.

Cette décomposition fournit les asymptotes ; l'étude du signe de g' complète ensuite le tableau de variations. Toujours préciser les intervalles séparés par $x = 1$.

À retenir

La dérivée décrit la pente locale ; son signe donne les variations ; la dérivée seconde décrit la variation de pente et la convexité. Les limites complètent l'étude aux extrémités et construisent les asymptotes.