Dérivation · l'essentiel à retenir

2 BAC Sciences Expérimentales • Définitions, formules et réflexes pour l'étude des fonctions

1. Nombre dérivé

Taux d'accroissement : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $x \neq a$.

Dérivée en a : $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, si la limite est réelle finie.

Dérivée en $a \iff$ dérivées à droite et à gauche finies et égales.

Dérivable $\Rightarrow$ continue ; réciproque fausse ($|x|$ en 0).

2. Tangente

Au point $A(a, f(a))$:

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Pente : $f'(a)$. Approximation locale : $f(a+h) \approx f(a)+hf'(a)$ pour h petit.

3. Dérivées usuelles

$(c)' = 0$	$(x^n)' = nx^{n-1}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$(1/x)' = -1/x^2$	$x \neq 0$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = 1/\cos^2 x$	$\cos x \neq 0$
$(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$	$x \in \mathbb{R}$

Toujours préciser l'intervalle où la fonction et la formule sont définies.

4. Opérations

$$(u+v)' = u' + v', \qquad (uv)' = u'v + uv'.$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0), \qquad (u \circ v)' = (u' \circ v)v'.$$

Réciproque : si f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et $f'(x_0) \neq 0$, $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$.

5. Variations et extrema

$f' \geq 0$ sur $I \Rightarrow f$ croissante ; $f' \leq 0 \Rightarrow f$ décroissante. Si $f' = 0$ sur I, f est constante.

Extremum intérieur et dérivabilité $\Rightarrow f'(a) = 0$ (condition nécessaire). f' : $+$ puis $-$ $\Rightarrow$ maximum ; $-$ puis $+$ $\Rightarrow$ minimum.

6. Rolle et TAF

Rolle : continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in]a,b[: f'(c) = 0$.

TAF : mêmes hypothèses de continuité/dérivabilité $\Rightarrow \exists c \in]a,b[$:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

IAF : si $m \leq f' \leq M$ et $a < b$, $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

7. Dérivée seconde

$f'' = (f')'$. Si $f'' \geq 0$, la courbe est convexe ; si $f'' \leq 0$, elle est concave. Point d'inflexion : changement de convexité, souvent détecté par un changement de signe de f'' (pas par sa seule annulation).

8. Asymptotes

Verticale $x = a$: une limite unilatérale de f vaut $+\infty$ ou $-\infty$.
Horizontale $y = \ell$: $f(x) \to \ell$ quand $x \to +\infty$ ou $-\infty$.
Oblique $y = mx + p$: $f(x) - (mx+p) \to 0$ à l'extrémité étudiée, avec $m \neq 0$.

9. Routine d'étude

Domaine et symétries $\to$ limites et asymptotes $\to$ dérivée et signe $\to$ variations et extrema $\to$ tangentes/intersections $\to$ dérivée seconde et courbure si demandé $\to$ tracé cohérent.

Comparer $f - g$ pour la position de C_f par rapport à $y = g(x)$.

10. Trois contrôles

Domaine : dénominateur non nul et racines compatibles.
Signe : séparer les intervalles par les zéros et valeurs interdites.
Conclusion : vérifier les hypothèses et placer chaque point $(a, f(a))$.