Série d'exercices · Dérivation

2 BAC Sciences Expérimentales • Entraînement progressif, méthodes et étude complète

Partie I · Nombre dérivé et dérivées unilatérales

Exercice 1 · Définition en un point

Soit $f(x) = x^2 + x - 1$.

- Calculer, pour $x \neq 1$, $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- En déduire que f est dérivable en 1 et calculer $f'(1)$.
- Retrouver le résultat avec la variable h.

Exercice 2 · Racine et limite

Soit $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

- Justifier que g est définie sur $\mathbb{R}$.
- Calculer $\dfrac{g(x) - g(0)}{x}$ pour $x \neq 0$ en rationalisant.
- Étudier la limite en 0 et donner $g'(0)$.

Exercice 3 · Valeur absolue et point anguleux

Soit $h(x) = |2x^2 - 8| + x + 1$.

- Calculer $h(-2)$.
- Étudier le signe de $2x^2 - 8$ à gauche et à droite de -2.
- Calculer $h'_g(-2)$ et $h'_d(-2)$ à l'aide des expressions adaptées.
- Conclure sur la dérivabilité et interpréter graphiquement.

Partie II · Calculer une dérivée

Exercice 4 · Règles opératoires

Calculer et simplifier la dérivée sur le domaine de chaque fonction :

- $u(x) = (x^2 + 1)(3x - 2)$;
- $v(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$;
- $w(x) = \sqrt{2x + 3}$;
- $q(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

Préciser les valeurs interdites et les intervalles de dérivabilité.

Exercice 5 · Composition

Dériver les fonctions suivantes en indiquant la règle utilisée :

$$p(x) = (3x^2 + 1)^5, \qquad r(x) = \sin(x^2 + 1),$$

$$s(x) = \arctan(2x - 1).$$

Exercice 6 · Dérivée et sens de variation

Soit $q(x) = x + \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

- Calculer $q''(x)$ et montrer que $q''(x) > 0$.
- En déduire la convexité de q et calculer la tangente en $x = 1$.

Partie III · Continuité, dérivabilité et tangente

Exercice 7 · Raccordement de deux expressions

On définit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \leq 1, \\ \dfrac{2x + a}{x + 2}, & x > 1. \end{cases}$$

- Déterminer la condition sur a, b pour que f soit continue en 1.
- Calculer les dérivées à gauche et à droite en 1 lorsque la continuité est assurée.
- Déterminer a et b pour que f soit dérivable en 1.

Exercice 8 · Tangente et approximation

Soit $f(x) = x^3 - 2x + 1$.

- Calculer $f'(x)$, $f(1)$ et $f'(1)$.
- Écrire l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.
- Donner une approximation de $f(1,02)$ par cette tangente.

Exercice 9 · Demi-tangente verticale

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$.

- Calculer $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ pour $x > 0$ et étudier sa limite en 0^+.
- La fonction est-elle dérivable à droite en 0 au sens d'un nombre dérivé fini ?
- Donner l'équation de la demi-tangente et faire un schéma annoté.

Partie IV · Variations et extremums

Exercice 10 · Tableau de variations

Soit $f(x) = x^3 - 3x$.

- Calculer et factoriser $f'(x)$.
- Étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.
- Dresser le tableau de variations et préciser les extremums locaux.
- Calculer l'équation de la tangente en $x = 0$.

Exercice 11 · Théorème de Rolle

Soit $g(x) = x^2 - 4x + 3$ sur $[1, 3]$.

- Vérifier les hypothèses du théorème de Rolle.
- Déterminer le réel $c \in]1, 3[$ tel que $g'(c) = 0$.
- Interpréter le résultat sur la courbe.

Exercice 12 · Accroissements finis

Appliquer le TAF à $f(x) = x^2$ sur $[1, 3]$ et déterminer le réel c garanti. Puis utiliser $2 \leq f'(x) \leq 6$ pour encadrer $f(3) - f(1)$. En extension, appliquer le TAF à $u(x) = \arctan x$ sur $[0, 1]$ pour établir $\frac{1}{2} < \arctan(1) < 1$, puis rappeler sa valeur exacte.

Partie V · Convexité, asymptotes et fonction réciproque

Exercice 13 · Convexité et inflexion

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2$.

- Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
- Étudier le signe de f'' et les intervalles de convexité/concavité.
- Déterminer les coordonnées du point d'inflexion, s'il existe.
- Écrire l'équation de la tangente en ce point.

Exercice 14 · Asymptotes et position relativ

Soit $g(x) = \dfrac{2x^2 - x}{x - 1}$.

- Déterminer son domaine et effectuer la division euclidienne.
- Étudier les limites au voisinage de 1 et à l'infini.
- Identifier les asymptotes et étudier la position de C_g par rapport à l'asymptote oblique.

Exercice 15 · Dérivée d'une réciproque

Soit $f(x) = x^3 + x$.

- Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Justifier que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
- Sans calculer l'expression de f^{-1}, déterminer $(f^{-1})'(2)$.

Exercice 16 · Symétrie et asymptotes horizonta

Soit $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

- Étudier le domaine et la parité de h.
- Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
- Calculer $h''(x)$ et étudier les variations de h.
- Donner la tangente à l'origine et comparer C_h à cette tangente.

Exercice de synthèse · Étude complète

Prendre le temps de rédiger chaque justification et de vérifier les signes

Problème · La courbe et ses asymptotes

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

et sa courbe représentative C_f dans un repère orthonormé.

- **Domaine et écriture utile.**
  a) Déterminer D_f.
  b) Effectuer la division euclidienne de x^2+1 par $x-1$ et établir, pour $x \neq 1$, une écriture de la forme $f(x) = x+1+\dfrac{\lambda}{x-1}$.
- **Limites et asymptotes.**
  a) Calculer les limites de f en 1^- et 1^+, puis interpréter.
  b) Calculer $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$ et $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$.
  c) En déduire les asymptotes de C_f.
- **Dérivée et variations.**
  a) Calculer $f'(x)$ sous forme simplifiée.
  b) Résoudre $f'(x)=0$ et dresser le tableau de signe de f' sur D_f.
  c) Calculer les images des points critiques, puis dresser le tableau de variations complet en indiquant les limites aux bornes.
- **Convexité.**
  a) Calculer $f''(x)$.
  b) Donner la convexité de C_f sur chacun des intervalles de son domaine. Existe-t-il un point d'inflexion ? Justifier avec le domaine.
- **Tangentes aux extremums.** Calculer $f(1-\sqrt{2})$ et $f(1+\sqrt{2})$, puis donner les équations des tangentes en ces points.
- **Lecture et construction.**
  a) Déterminer l'intersection avec l'axe des ordonnées. La courbe coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
  b) Étudier le signe de $f(x)-(x+1)$ et préciser la position relative de C_f et de son asymptote oblique.
  c) Calculer l'équation de la tangente à C_f en $x=0$.
  d) Compléter le tableau : $f(-1)=\ldots$, $f(0)=\ldots$, $f(2)=\ldots$, $f(3)=\ldots$.
  e) Construire les deux branches en respectant asymptotes, tangentes horizontales, variations et convexité.

Repère : placer les tangentes et construire les deux branches

