Étude de fonction

2 BAC Sciences Expérimentales • Énoncé · entraînement type examen

Exercice 1 · Étude de fonction

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x - 2\sqrt{x-1}.$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\,\text{cm}$.

1. Déterminer D_f.

2. Vérifier que, pour tout $x \in D_f$,

$$f(x) = \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2,$$

puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. **a)** Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 1.
b) Interpréter géométriquement ce résultat.

4. **a)** Montrer que, pour tout $x \in]1;+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}+1\right)}.$$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

5. En déduire que, pour tout $x \in [1;+\infty[$,

$$\frac{x}{2} \geq \sqrt{x-1}.$$

Prof. Bouhaja

6. **a)** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$.
c) En déduire la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

7. Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et de la droite (D) d'équation $y = x$.

8. Donner l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point $A(5; f(5))$.

9. Soit g la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par

$$g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}(x-1)\sqrt{x-1}.$$

a) Montrer que, pour tout $x \in]1;+\infty[$, $g'(x) = f(x)$.
b) En déduire que g est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

10. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.