Étude de fonction — Corrigé détaillé

Référence : Maxi Math • Exercice 42 • Correction détaillée.

$$f(x) = x - 1 + \frac{3x+4}{(x+1)^2}, \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

1. Limites aux bornes du domaine

Le domaine s'écrit $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$. Les quatre limites à calculer sont celles en $-\infty$, -1^-, -1^+ et $+\infty$.

En $+\infty$ et en $-\infty$

Pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$, on divise le numérateur et le dénominateur par x^2 :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x+4}{(x+1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}{(1+\frac{1}{x})^2} = \frac{0+0}{(1+0)^2} = 0.$$

Donc, par somme de limites :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - 1 + \frac{3x+4}{(x+1)^2} \right) = \boxed{+\infty},$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x - 1 + \frac{3x+4}{(x+1)^2} \right) = \boxed{-\infty}.$$

En -1^- et en -1^+

On a $\lim\limits_{x\to-1}(x-1) = -2$, $\lim\limits_{x\to-1}(3x+4) = 1 > 0$ et $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)^2 = 0$, avec $(x+1)^2 > 0$ pour $x \neq -1$. Ainsi

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{3x+4}{(x+1)^2} = \lim_{x\to-1^+} \frac{3x+4}{(x+1)^2} = +\infty.$$

Par somme avec le terme $x - 1$, qui tend vers -2 :

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \left(x - 1 + \frac{3x+4}{(x+1)^2} \right) = \boxed{+\infty},$$
$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \left(x - 1 + \frac{3x+4}{(x+1)^2} \right) = \boxed{+\infty}.$$

2. Dérivée et factorisation

f est dérivable sur chacun des intervalles de D_f. Avec $u = 3x+4$, $u' = 3$, $v = (x+1)^2$ et $v' = 2(x+1)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{3(x+1)^2 - 2(x+1)(3x+4)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(x+1)^4 + 3(x+1)^2 - 2(x+1)(3x+4)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(x+1)\left[(x+1)^3 + 3(x+1) - 2(3x+4)\right]}{(x+1)^4}. \end{aligned}$$

Or

$$(x+1)^3 + 3(x+1) - 2(3x+4) = x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x^2+4x+4) = (x-1)(x+2)^2.$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x+2)^2}{(x+1)^4} = \frac{(x-1)(x+2)^2}{(x+1)^3} \quad (x \neq -1).}$$

2. Signe de la dérivée et variations (suite)

$(x+2)^2$ est positif, sauf en -2 où il s'annule. Le signe de f' est donc celui de $(x-1)/(x+1)^3$, en tenant compte de ce zéro supplémentaire.

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)^2$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x+1)^3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{7}{4}$	↗	$+\infty$

Les valeurs utiles sont

$$f(-2) = -3 + \frac{-6+4}{1} = -5, \qquad f(1) = 0 + \frac{7}{2^2} = \frac{7}{4}.$$

Sur $]-\infty,-1[$, $f' \geq 0$, avec un seul zéro isolé en -2 : f est **strictement croissante**. En -2, le signe de f' ne change pas : ce n'est pas un extremum. Sur $]-1,1]$, f est strictement décroissante ; sur $[1,+\infty[$, elle est strictement croissante.

Sur $]-1,+\infty[$, f admet le minimum $f(1) = \frac{7}{4} > 0$. Ce minimum n'est pas un minimum sur tout D_f.

3. Branches infinies et position relative

3.a. Asymptotes : la méthode complète

Les limites infinies en -1 donnent l'**asymptote verticale** $x = -1$. Les deux branches montent vers $+\infty$ de part et d'autre de cette droite. À $+\infty$ et à $-\infty$, la limite de $f(x)$ est infinie. Calculons le quotient :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3x+4}{x(x+1)^2}\right)$$
$$= 1 - 0 + 0 = \boxed{1}.$$

On cherche ensuite la limite de $f(x) - x$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(-1 + \frac{3x+4}{(x+1)^2}\right) = -1 + 0 = \boxed{-1}.$$

Enfin,

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (x-1)) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x+4}{(x+1)^2} = \boxed{0}.$$

Aux deux infinis, l'asymptote oblique est (D) : $\boxed{y = x - 1}$.

3.b. Position de la courbe par rapport à (D)

$$f(x) - (x-1) = \frac{3x+4}{(x+1)^2}, \qquad (x+1)^2 > 0 \text{ sur } D_f.$$

Le signe est celui de $3x+4$, qui s'annule en $x = -\frac{4}{3}$.

Intervalle	$]-\infty,-\frac{4}{3}[$	$]-\frac{4}{3},-1[$	$]-1,+\infty[$
Signe de $f(x)-(x-1)$	$-$	$+$	$+$
Position de (C_f)	En dessous	Au-dessus	Au-dessus

À $x = -\frac{4}{3}$, $f(x) = x - 1 = -\frac{7}{3}$: les deux courbes se coupent en $I(-\frac{4}{3};-\frac{7}{3})$.

4. Tangente, intersection avec l'axe et tracé

4.a. Tangente au point d'abscisse -2

$$f(-2) = -5, \qquad f'(-2) = \frac{(-3)\,0^2}{(-1)^3} = 0.$$

La formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ donne $y = 0(x+2) - 5$. Ainsi

$$\boxed{(T) : \ y = -5}, \quad \text{tangente horizontale au point } A(-2;-5).$$

4.b. Existence et unicité du zéro α

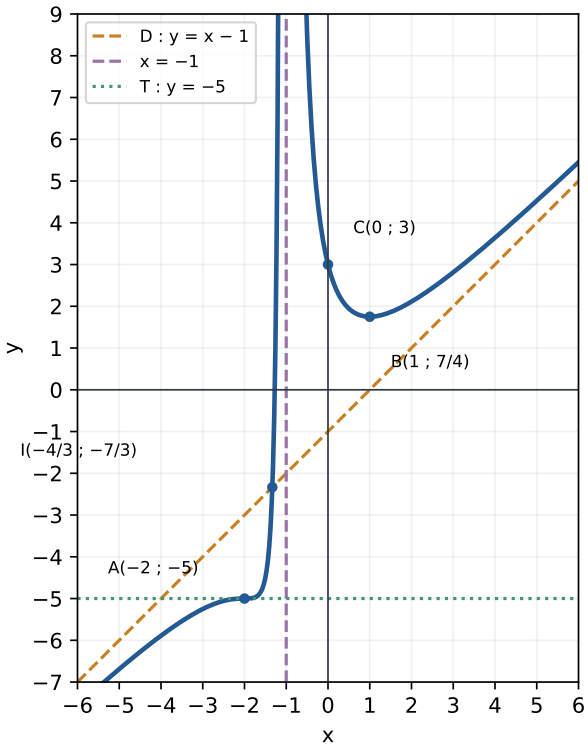
Sur $]-\infty,-1[$, f est continue, strictement croissante, et ses limites sont $-\infty$ et $+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie, l'équation $f(x) = 0$ y admet une unique solution α. Sur $]-1,+\infty[$, $f(x) \geq \frac{7}{4} > 0$: il n'y a aucune autre solution. Donc (C_f) coupe (Ox) en un seul point $(\alpha;0)$. Pour l'encadrement, $f(-2) = -5 < 0 = f(\alpha)$. Comme f est strictement croissante sur $]-\infty,-1[$, on a $-2 < \alpha$. Avec $\alpha < -1$:

$$\boxed{-2 < \alpha < -1}.$$

À titre de repère pour le tracé : $f(-1{,}3) \approx -1{,}189 < 0$ et $f(-1{,}2) = 7{,}8 > 0$, donc $-1{,}3 < \alpha < -1{,}2$; numériquement, $\alpha \approx -1{,}27568$.

4.c. Construction de (C_f)

On place les asymptotes $x = -1$ et $y = x - 1$, la tangente $y = -5$, les points $A(-2;-5)$, $B(1;\frac{7}{4})$, $I(-\frac{4}{3};-\frac{7}{3})$, $C(0;3)$ et $(\alpha;0)$. On respecte ensuite le tableau de variations et la position relative.



Lecture : la branche gauche est croissante même au point A, où sa tangente est horizontale. La branche droite descend jusqu'à B, puis remonte. Le dessin est une fenêtre de visualisation ; les branches se prolongent à l'infini.

5. Discussion graphique selon le paramètre m

On étudie les solutions réelles distinctes de

$$(E_m) : \quad x^3 + (1-m)x^2 + 2(1-m)x + 3 - m = 0.$$

5.a. Transformer l'équation

En regroupant les termes contenant m :

$$\begin{aligned}(E_m) &\iff x^3 + x^2 + 2x + 3 - m(x^2 + 2x + 1) = 0 \\ &\iff x^3 + x^2 + 2x + 3 = m(x+1)^2.\end{aligned}$$

Pour $x = -1$, le membre gauche vaut $-1 + 1 - 2 + 3 = 1$, alors que le membre droit vaut 0. Donc -1 n'est jamais solution et on peut diviser par $(x+1)^2$:

$$(E_m) \iff \frac{x^3 + x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2} = m.$$

Or

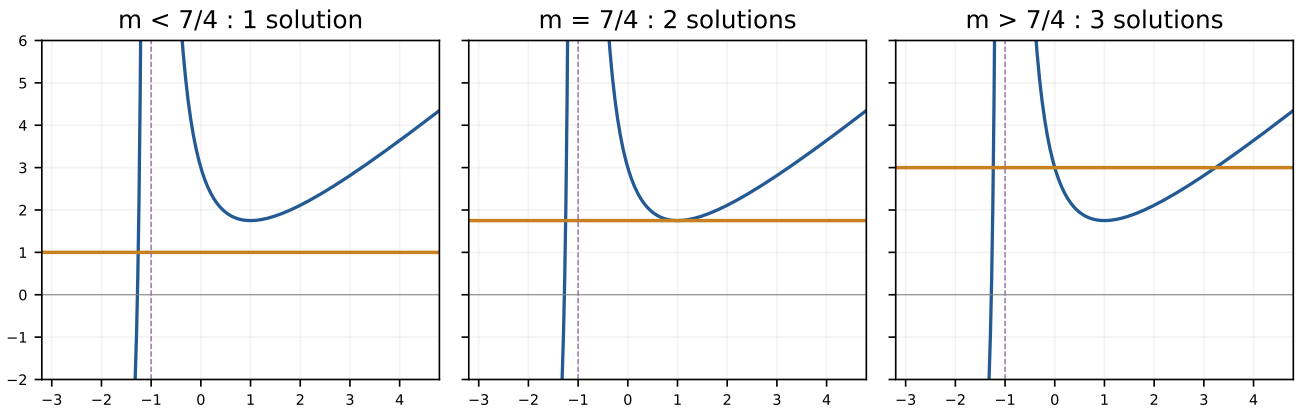
$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{(x-1)(x+1)^2 + 3x + 4}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^3 + x^2 - x - 1 + 3x + 4}{(x+1)^2} = \frac{x^3 + x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2}.\end{aligned}$$

$$(E_m) \iff f(x) = m \quad (x \neq -1).$$

Les solutions sont les abscisses des intersections de (C_f) avec la droite horizontale $y = m$.

5.b. Compter les intersections

Sur $]-\infty, -1[$, la fonction est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$: **une solution pour tout réel** m. Sur la branche droite, le minimum est $\frac{7}{4}$. Il y a donc zéro intersection si $m < \frac{7}{4}$, une si $m = \frac{7}{4}$, et deux si $m > \frac{7}{4}$.



m	Nombre	Localisation des solutions
$m < \frac{7}{4}$	**1**	Une solution dans $]-\infty, -1[$.
$m = \frac{7}{4}$	**2**	$x = -\frac{5}{4}$ et $x = 1$. Le point $x = 1$ ne se compte qu'une fois.
$m > \frac{7}{4}$	**3**	Une dans chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$.

Vérification au seuil $m = \frac{7}{4}$

$$(E_{7/4}) \iff 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5 = 0 \iff (x-1)^2(4x+5) = 0.$$

On retrouve les deux solutions distinctes 1 et $-\frac{5}{4}$. Le facteur carré traduit le contact de la droite $y = \frac{7}{4}$ au minimum B.