Étude de fonction

Exercice 42 • Référence : **Maxi Math** • Énoncé et rappels de cours

La fonction

Soit f définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = x - 1 + \dfrac{3x+4}{(x+1)^2}$. On note (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 · Limites

Calculer les limites de f aux bornes des intervalles de D_f.

Rappel. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$. Il faut donc calculer les quatre limites :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \qquad \lim_{x \to -1^-} f(x), \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

2 · Variations

a) Montrer que, pour $x \neq -1$,

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x+2)^2}{(x+1)^4}.$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.

Rappel. $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$. Étudier les facteurs du numérateur et du dénominateur ; un carré ne change pas de signe. Un zéro de f' ne donne pas toujours un extremum.

3 · Asymptotes

a) Étudier la branche de (C_f) au voisinage de -1 à l'aide des limites à gauche et à droite.

b) À $+\infty$, puis à $-\infty$, procéder dans cet ordre :

1. Calculer $\lim f(x)$.
2. Si cette limite est infinie, calculer $\lim \dfrac{f(x)}{x}$.
3. Si le quotient tend vers $a \in \mathbb{R}^*$, calculer $\lim\big(f(x) - ax\big)$ et conclure sur la branche infinie.

c) Déterminer la position relative de (C_f) par rapport à son asymptote oblique.

Rappel. À l'infini : $f(x) \to \ell \in \mathbb{R}$ donne l'asymptote $y = \ell$. Si $f(x) \to \pm\infty$, le quotient $f(x)/x$ précise la direction : limite 0 pour (Ox), limite infinie pour (Oy). Si $f(x)/x \to a \neq 0$ et $f(x) - ax \to b \in \mathbb{R}$, l'asymptote est $y = ax + b$; si cette dernière limite est infinie, la branche parabolique a pour direction $y = ax$. Pour la position relative, étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$.

4 · Construction

a) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse -2.

b) Montrer que (C_f) coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α, avec $-2 < \alpha < -1$.

c) Tracer (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Rappel. T_a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. L'existence d'un zéro s'appuie sur la continuité et un changement de signe ; la stricte monotonie donne l'unicité sur l'intervalle étudié. Pour le tracé : asymptotes, points remarquables, tangente et variations.

5 · Paramètre

Discuter graphiquement, suivant $m \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions réelles de

$$(E_m) : \quad x^3 + (1-m)x^2 + 2(1-m)x + 3 - m = 0.$$

Rappel. Après avoir vérifié que -1 n'est pas solution, transformer (E_m) en $f(x) = m$. Le nombre de solutions distinctes est le nombre d'intersections de (C_f) avec la droite horizontale $y = m$.