Série 0 · Suites numériques

Rappels et exercices progressifs · 2 BAC Sciences expérimentales

Dans cette série, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Justifier chaque réponse et préciser le premier rang utilisé.

Rappel · Suites arithmétiques

Une suite est arithmétique s'il existe un réel constant r tel que $u_{n+1} - u_n = r$.

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r} \qquad \boxed{\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}} \quad (n \geq p).$$

Si $r > 0$, elle est strictement croissante ; si $r < 0$, strictement décroissante ; si $r = 0$, constante. Si $r > 0$, sa limite est $+\infty$; si $r < 0$, elle vaut $-\infty$.

Exercice 1 · Reconnaître et exploiter

1) Soit $a_n = 5 - 3n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer a_0, a_1 et a_2. Montrer que (a_n) est arithmétique et préciser sa raison.

b) Étudier son sens de variation et déterminer sa limite.

c) Calculer a_{20} puis $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ en fonction de n.

2) Une suite arithmétique (b_n) vérifie $b_2 = 7$ et $b_5 = 19$. Déterminer sa raison, b_0 et son terme général. Montrer qu'elle est strictement croissante, puis calculer $b_2 + b_3 + \cdots + b_{10}$.

Rappel · Suites géométriques

Une suite est géométrique s'il existe un réel constant q tel que $u_{n+1} = q u_n$. Pour $q \neq 0$ et $n \geq p$:

$$\boxed{u_n = u_p q^{n-p}} \qquad \boxed{\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}} \quad (q \neq 1).$$

Si $q = 1$, la somme vaut $(n-p+1)u_p$. Si $|q| < 1$, alors $q^n \to 0$. Si $u_0 > 0$: $0 < q < 1$ donne une suite strictement décroissante ; $q > 1$ donne une suite strictement croissante. Pour $q < 0$, examiner l'alternance des signes.

Exercice 2 · Raison, somme et limite

1) Soit $c_n = 6\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Calculer c_0, c_1, c_2, puis montrer que (c_n) est géométrique. Montrer qu'elle est positive et strictement décroissante. Calculer sa limite et $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$.

2) On donne $d_0 = 2$ et $d_{n+1} = \frac{3}{2} d_n$. Déterminer d_n, montrer que (d_n) est strictement croissante et calculer sa limite.

3) Soit $e_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Calculer ses quatre premiers termes. Est-elle monotone ? Est-elle convergente ? Justifier.

Récurrence et encadrement

Prouver une propriété, étudier les variations, puis conclure

Rappel · Bornes et récurrence

(u_n) est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq u_n$ pour tout n ; **majorée** s'il existe M tel que $u_n \leq M$ pour tout n ; **bornée** si $m \leq u_n \leq M$.

1) **Initialisation :** vérifier la propriété au premier rang.
2) **Hérédité :** la supposer vraie à un rang n, puis la démontrer au rang $n+1$.
3) **Conclusion :** annoncer les rangs pour lesquels elle est établie.

Exercice 3 · Trois récurrences

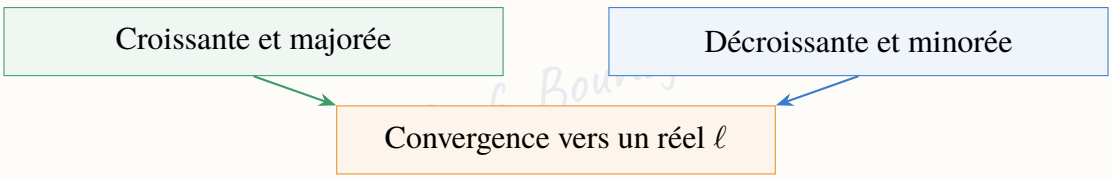
Pour chacune des suites suivantes, calculer les deux premiers termes après le terme initial et démontrer par récurrence l'encadrement demandé.

1) $u_0 = 2$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n)$: montrer que $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) $v_0 = 2$, $v_{n+1} = \sqrt{6 + v_n}$: montrer que $0 < v_n < 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) $w_0 = 1$, $w_{n+1} = 2 - \frac{1}{2+w_n}$: montrer que $1 \leq w_n \leq \sqrt{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour la troisième suite, vérifier dans l'hérédité que le dénominateur est positif et utiliser $2 - \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Rappel · Variations et convergence

Par différence : $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout n signifie que la suite est croissante ; une différence ≤ 0 signifie qu'elle est décroissante. **Par quotient :** si $u_n > 0$ pour tout n, comparer u_{n+1}/u_n à 1.



Si $u_{n+1} = f(u_n)$ et si $u_n \to \ell$, on peut écrire $\ell = f(\ell)$ lorsque f est continue en ℓ. Vérifier ensuite quelle solution respecte l'encadrement. La convergence doit d'abord être justifiée.

Exercice 4 · Une suite auxiliaire

On considère $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer u_1 et u_2. Montrer par récurrence que $u_n < 6$.
2) On pose $v_n = 6 - u_n$. Montrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
3) En déduire v_n, puis montrer que $u_n = 6 - \dfrac{7}{2^n}$.
4) Montrer que (u_n) est strictement croissante. Donner un minorant et un majorant de la suite, puis calculer sa limite.
5) Calculer $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de n.

Convergence et entraînement national

Utiliser les encadrements et les suites auxiliaires

Exercice 5 · Deux suites convergentes

A. Soit $u_0 = -\frac{5}{4}$ et $u_{n+1} = (u_n + 2)^2 - 2$.

1) Montrer par récurrence que $-2 < u_n < -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Factoriser $u_{n+1} - u_n$, puis montrer que (u_n) est strictement décroissante.
3) En déduire qu'elle converge. Déterminer sa limite en utilisant l'encadrement et le sens de variation.

B. Soit $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = \sqrt{3v_n - 2}$.

1) Montrer par récurrence que $v_n \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Montrer que $v_{n+1} \leq v_n$; on pourra comparer $3v_n - 2$ et v_n^2.
3) Justifier la convergence vers un réel $\ell \geq 2$, puis calculer ℓ.

Rappel · Encadrer par une suite géométrique

Si $0 \leq u_{n+1} \leq q u_n$ pour tout n, avec $u_0 \geq 0$ et $0 < q < 1$, alors, par récurrence :

$$0 \leq u_n \leq u_0 q^n.$$

Comme $u_0 q^n \to 0$, le théorème des gendarmes donne $u_n \to 0$.

Exercice 6 · Objectif national

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1) Calculer u_1.
2) Montrer par récurrence que $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Préciser pourquoi $u_n < \frac{1}{2}$ pour $n \geq 1$.
3) a) Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b) En déduire que (u_n) est strictement décroissante.
4) Montrer que $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis calculer sa limite.
5) a) Vérifier que $\dfrac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\dfrac{1}{u_n} - 1\right)$.
   b) Poser $z_n = \dfrac{1}{u_n} - 1$. Déterminer la nature de (z_n), son premier terme et son terme général, puis exprimer u_n en fonction de n.

Extrait adapté de l'examen national du baccalauréat, session normale 2021, Sciences expérimentales (PC–SVT), exercice 2.

Adaptation de la version fournie : encadrement corrigé au rang 0 ; question utilisant le logarithme non reprise.