Série 1 · Suites numériques

Carte de méthode et exercices · 2 BAC Sciences expérimentales

Que dois-je démontrer sur la suite (u_n) ?

Arithmétique

Calculer $u_{n+1} - u_n$.
Obtenir une constante r, indépendante de n.
Alors $u_n = u_0 + nr$.

Géométrique

Montrer $u_{n+1} = qu_n$, avec q constant.
Si $u_n \neq 0$, on peut calculer u_{n+1}/u_n.
Alors $u_n = u_0 q^n$.

Variations et convergence · Le chemin à suivre

1. Encadrer. Pour une suite récurrente, établir par récurrence que u_n reste dans un intervalle où la récurrence est définie.
2. Comparer. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$; si $u_n > 0$, comparer u_{n+1}/u_n à 1.
3. Conclure. Une suite croissante et majorée, ou décroissante et minorée, converge vers un réel ℓ.
4. Calculer la limite. Si $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue en ℓ, résoudre $f(\ell) = \ell$, puis retenir la solution compatible avec les bornes. Justifier d'abord la convergence.

Cas particulier · La fonction f est croissante

Si $u_{n+1} = f(u_n)$, si $u_n \in I$ pour tout n et si f est croissante sur I, on peut propager par récurrence la comparaison entre deux termes consécutifs :

$$u_0 \leq u_1 \Longrightarrow u_n \leq u_{n+1}, \qquad u_0 \geq u_1 \Longrightarrow u_n \geq u_{n+1}.$$

Pour propager des inégalités **strictes**, utiliser la stricte croissance de f. Le seul fait que f soit croissante ne suffit pas à garantir une suite strictement monotone.

Exercice 1 · Encadrer et faire décroître

On considère $u_0 = -\frac{5}{4}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n + 2)^2 - 2$.

1) Montrer par récurrence que $-2 < u_n < -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
3) En déduire qu'elle est convergente.
4) Calculer sa limite. Justifier le choix parmi les solutions de l'équation obtenue.

Applications progressives

Justifier les bornes, les variations et chaque passage à la limite

Exercice 2 · Une récurrence avec une racine

On considère $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$.

1) Montrer par récurrence que $u_n \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Montrer que (u_n) est décroissante et minorée par 2.
3) En déduire qu'elle converge vers un réel $\ell \geq 2$.
4) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 3 · Fonction associée et suite auxiliaire

1. On considère f définie sur $[0, 4]$ par

$$f(x) = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)^2.$$

a) Étudier les variations de f sur $[0, 4]$. On peut étudier d'abord $t \mapsto \frac{4t}{2+t}$ sur $[0, 2]$, puis utiliser la croissance de la racine et du carré sur les réels positifs.

b) Montrer que $f([0, 4]) \subset [0, 4]$.

2. On considère $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer par récurrence que $0 < u_n < 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que (u_n) est strictement croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

3. On pose $v_n = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{u_n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et préciser son premier terme.

b) En déduire v_n, puis u_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Rappel · Somme et produit

La somme $v_0 + \cdots + v_n$ contient $n + 1$ termes. Si (v_n) est arithmétique :

$$S_n = (n+1)\frac{v_0 + v_n}{2}, \qquad 2^{v_0} \times \cdots \times 2^{v_n} = 2^{S_n}.$$

Suites auxiliaires arithmétiques

Transformer la récurrence, calculer les termes et exploiter les sommes

La méthode · Une transformation pour reconnaître une suite

À partir de la relation définissant v_n :

$$\boxed{\text{Exprimer } v_{n+1}} \longrightarrow \boxed{\text{Calculer } v_{n+1}-v_n} \longrightarrow \boxed{\text{Reconnaître une constante } r}.$$

Puis écrire $v_n = v_0 + nr$, isoler u_n dans la relation entre u_n et v_n, et calculer la limite. Vérifier que les dénominateurs utilisés ne s'annulent pas.

Exercice 4 · Une suite définie par un quotient

On considère $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1}.$$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que la suite est bien définie et que $u_n \neq 0$.

3) On définit (v_n) par $u_n v_n = u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que (v_n) est arithmétique. Déterminer sa raison et son premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n, puis en déduire u_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 5 · Inverse, somme et produit

On considère $u_0 = 2$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{7u_n - 25}{u_n - 3}.$$

1) Calculer u_1, puis montrer par récurrence que $u_n > 5$ pour tout $n \geq 1$. Justifier que la suite est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 3$ et $u_n \neq 5$.

2) On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que (v_n) est arithmétique ; préciser sa raison et v_0.

b) Déterminer v_n, puis u_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) Calculer $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n.

4) On pose $P_n = 2^{v_0} \times 2^{v_1} \times \cdots \times 2^{v_n}$. Déterminer P_n en fonction de n.

Référence : Maxi Maths, chapitre « Suites numériques », exercices 15, 16, 17, 21 et 22.