ROYAUME DU MAROC

# Correction

## Baccalauréat Sciences & Technologies

## Session : Normal 2008

# MATHÉMATIQUES

## Exercice 1 : (3 pts)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, les deux points $A(0,-1,1)$, $B(1,-1,0)$ et la sphère $(S)$ d'équation : $x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$

**1.25 pt** **1 -** On a : $x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z-2)^2=\sqrt{3}^2$

Donc, $(S)$ est la sphère $\boxed{\text{de centre } \Omega(1;0;2) \text{ et de rayon } R=\sqrt{3}}$

Et on a : $0^2+(-1)^2+1^2-2\times 0-4\times 1+2=0$, donc $\boxed{A\in(S)}$

**1.25 pt** **2 -** On a : $\overrightarrow{OA}\,(0;-1;1)$ et $\overrightarrow{OB}\,(1;-1;0)$

D'où : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

par conséquence : $\boxed{\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\,(1;1;1)}$

**0.5 pt** **3 -** On a $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\,(1;1;1)$ est un vecteur normal sur le plan $(OAB)$

donc l'équation cartésienne du plan $(OAB)$ s'écrit sous la forme : $x+y+z+d=0$ ave $d\in\mathbb{R}$

Or : $O\in(OAB)$, donc $d=0$

et donc $\boxed{x+y+z=0}$ est une équation cartésienne du plan $(OAB)$

Calculons la distance du point $\Omega$ au plan $(OAB)$

$d(\Omega;(OAB))=\dfrac{|1+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}$

$\boxed{d(\Omega;(OAB))=\sqrt{3}=R}$

Donc $\boxed{\text{le plan } (OAB) \text{ est tangent à la sphère } (S) \text{ au point } A}$ puisque $A\in(S)$ et $A\in(OAB)$

## Exercice 2 : (3 pts)

**1 pt** **1 -** On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 6z + 34 = 0$

Le discriminant de cette équation est : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 34 = 36 - 136 = -100 = 10i^2$

Alors, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-6) + 10i}{2} = 3 + 5i$, et $z_2 = \dfrac{-b1i\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-6) - 10i}{2} = 3 - 5i$

( ***On peut aussi calculer le discriminant réduit de cette équation :***

$\Delta' = (-3)^2 - 1 \times 34 = 36 - 34 = -25 = 5i^2$

***D'où les solutions :***

$z_1 = \dfrac{-b' + i\sqrt{\Delta}'}{a} = \dfrac{-(-3) + 5i}{1} = 3 + 5i$, ***et*** $z_2 = \dfrac{-b'1i\sqrt{\Delta}'}{a} = \dfrac{-(-3) - 5i}{1} = 3 - 5i$ )

Alors l'ensemble des solutions de cette équation est : $\boxed{S = \{3 - 5i \ ; \ 3 + 5i\}}$

**2 -** Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $\left(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$, on considère les points $A(a = 3 + 5i)$, $B(b = 3 - 5i)$ et $C(c = 7 + 3i)$

Soit $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par la translation $T$ de vecteur $\vec{u}(4 - 2i)$

**0.75 pt** **a)** On a $M' = T(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z' = z + aff(\vec{u}) \Leftrightarrow z' = z + 4 - 2i$

Or $a + 4 - 2i = 3 + 5i + 4 - 2i = 7 + 3i = c$, donc $\boxed{C = T(A)}$

Alors $C$ est l'image de $A$ par la translation $T$

**0.5 pt** **b)** On a $\dfrac{b-a}{a-c} = \dfrac{3 - 5i - 7 - 3i}{3 + 5i - 7 - 3i} = \dfrac{-4 - 8i}{-4 + 2i} = \dfrac{2i(-4 + 2i)}{-4 + 2i} = \boxed{2i}$

**0.75 pt** **c)** On a $\dfrac{b-a}{a-c} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ ; donc : $\overline{(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB})} \equiv arg\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)[2\pi]$

D'où : $\boxed{\overline{(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB})} \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]}$

Donc $ABC$ est un trinagle rectangle en $C$; et on a $\dfrac{CB}{CA} = \left|\dfrac{b-c}{a-c}\right| = 2$

Alors : $\boxed{BC = 2AC}$

## Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient *six* boules rouges et *trois* boules vertes

**(les boules sont indiscernables au toucher)**




**1 -** On tire au hasard et simultanément (*l'ordre n'a pas d'importance*) ***trois*** boules de l'urne

On va donc utiliser les combinaisons $C_n^p$

**1 pt** **a)** la probabilité de tirer *deux* boules rouges et *une* verte : RRV est :

$\dfrac{C_6^2 \times C_3^1}{C_9^3} = \dfrac{15 \times 3}{84} = \boxed{\dfrac{15}{28}}$

**1 pt** **b)** On peut répondre par deux méthodes

***Première méthode :*** : la probabilité de tirer au moins *une* boule verte RRV ou RVV ou VVV est :

$\dfrac{C_6^2 \times C_3^1 + C_6^1 \times C_3^2 + C_3^3}{C_9^3} = \dfrac{15 \times 3 + 6 \times 3 + 1}{84} = \boxed{\dfrac{16}{21}}$

***Deuxième méthode :*** : On considère l'événement $A$ : "tirer **au moins** *une* boule verte"

L'événement contraire de l'événement $A$ est : $\overline{A}$ : "tirer *trois* boules rouges RRR"

On a $p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \dfrac{C_6^3}{C_9^3} = 1 - \dfrac{20}{84} = \dfrac{64}{84} = \boxed{\dfrac{16}{21}}$

1 pt **2 -** On tire, au hasard, successivement, et sans remise (*l'ordre n'a pas d'importance et il n'y a pas de répétition*) trois boules de l'urne

On va donc utiliser les arrangement sans répétition $A_n^p$

La probabilité de tirer **trois** boules rouges est : $\dfrac{A_6^3}{A_9^3} = \dfrac{120}{504} = \boxed{\dfrac{5}{21}}$

## Exercice 4 : (11 pts)

### Partie I

Soit $g$ la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - 2\ln x$

0.5 pt **1 - a)** Soit $x \in ]0;+\infty[$

On a $g'(x) = (x - 2\ln x)' = 1 - \dfrac{2}{x} = \boxed{\dfrac{x-2}{x}}$

0.5 pt **b)** On sait que $g'(x) = \dfrac{x-2}{x} \quad \forall x \in ]0;+\infty[$

Donc le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est celui du monôme $x - 2$

Et on a : si $x \in [2;+\infty[ \Rightarrow x \geqslant 2 \Rightarrow x - 2 \geqslant 0 \Rightarrow g'(x) \geqslant 0$

Et si $x \in ]0;2] \Rightarrow x \leqslant 2 \Rightarrow x - 2 \leqslant 0 \Rightarrow g'(x) \leqslant 0$

Donc $g$ est $\boxed{\text{décroissante sur } ]0;2] \text{ et croissante sur } [2;+\infty[}$

comme indiqué dans le tableau suivant :

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | ‖ ↘ | | $g(2) = 2(1-\ln 2)$ | ↗ | |

0.5 pt **2 -** On a $e > 2 \Rightarrow 1 > \ln 2 \Rightarrow 1 - \ln 2 > 0$, donc $g(2) = 2(1 - \ln 2) > 0$

Et on a $g(2) = 2(1 - \ln 2)$ est une valeur minimale pour la fonction $g$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ au point d'abscisse 2

Alors : $\forall x \in ]0;+\infty[$ é ; $\boxed{g(x) \geqslant g(2) > 0}$

## Partie II

On Considère la fonction numérique $f$ définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-(\ln x)^2$
Et soit $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

**0.75 pt** **1 -** On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x-(\ln x)^2)=-\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=$ $\boxed{-\infty}$
La courbe $(C)$ admet une asymptote verticale d'équation $x=0$

**0.5 pt** **2 - a)** On pose $t=\sqrt{x}$, donc $x\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ , et tant que $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\ln(t^2)}{t}\right)^2=\lim_{t\to+\infty}\left(2\times\frac{\ln t}{t}\right)^2=\boxed{0}$$

**0.75 pt** **b)** On a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-(\ln x)^2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(1-\dfrac{(\ln x)^2}{x}\right)\right)=\boxed{+\infty}$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$

Et on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{(\ln x)^2}{x}\right)=\boxed{1}$

**0.5 pt** **c)** On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-(\ln x)^2-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-(\ln x)^2=\boxed{-\infty}$
Et selon la question précédente, la courbe $(C)$ admet $\boxed{\text{une branche parabolique au voisinage de } +\infty}$ de direction la droite $(\Delta)$ d'équation $y=x$

**0.5 pt** **d)** On a $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ f(x)-x=-(\ln x)^2\leqslant 0$
Donc la courbe $\boxed{(C)\text{ est au-dessous de la droite }(\Delta)}$

**0.75 pt** **3 - a)** Soit $x\in]0;+\infty[$

On a : $f'(x)=(x-(\ln x)^2)'=1-2\ln'(x)\ln x=1-\dfrac{2\ln x}{x}=\dfrac{x-2\ln x}{x}=\boxed{\dfrac{g(x)}{x}}$

Et selon le signe de $g(x)$ **Partie I**, on a $f'(x)>0\,;\forall x\in]0;+\infty[$, donc $\boxed{f\text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[}$

**0.25 pt** **b)** Le tableau de variations de la fonction $f$

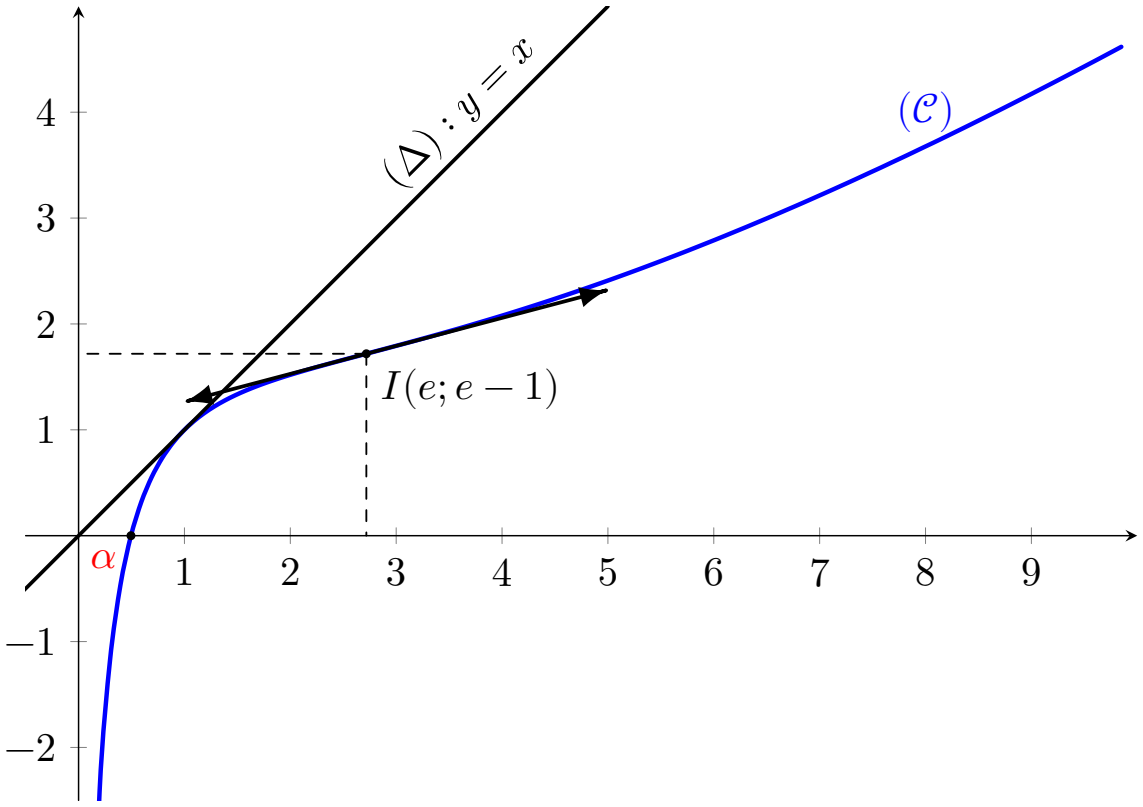
| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $f$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**0.5 pt** **c)** Une équation cartésienne de la tangente à la courbe $(C)$ au point d'abscisse 1 est :
$y=f'(1)(x-1)+f(1)\Leftrightarrow\boxed{y=x}$

**0.5 pt** **4 -** On a $f$ est continue, et strictement croissante sur $]0;+\infty[$
et $J=f(]0;+\infty[)=\left]\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[=]-\infty;+\infty[=\mathbb{R}$
Or $0\in J$, donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $I=]0;+\infty[$
Et puisque : $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}-1=\dfrac{1-e}{e}<0$
Et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-(\ln 2)^2>0$ (car selon les données : $(\ln 2)^2<\dfrac{1}{2}$ )
Alors, selon le théorème des valeurs intermédiaires, on a $\boxed{\dfrac{1}{e}<\alpha<\dfrac{1}{2}}$

**1 pt** **5 -** Traçons la droite $(\Delta)$ et la courbe $(C)$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

Prenons : $\alpha \approx 0.4948664145$, e $\approx 2.7$ et $I(e; e-1)$ point d'inflexion pour $(C)$




**0.5 pt** **6 - a)** On a $\forall x \in ]0; +\infty[\,;\ H'(x) = (x\ln x - x)' = x'\ln x - x\ln' x - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

Donc : $H : x \mapsto x\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$

Et on a $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \mathrm{d}x = [H(x)]_1^{\mathrm{e}} = H(\mathrm{e}) - H(1) = 0 - (-1) = \boxed{1}$

**0.75 pt** **b)** En utilisant une intégration par parties

$$\begin{aligned}
\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \mathrm{d}x &= \int_1^{\mathrm{e}} \ln x \times \ln x \mathrm{d}x \\
&= \int_1^{\mathrm{e}} H'(x) \times \ln x \mathrm{d}x \\
&= [H(x)\ln x]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} H(x)\ln' x \mathrm{d}x \\
&= H(\mathrm{e})\ln \mathrm{e} - H(1)\ln 1 - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x\ln x - x}{x}\mathrm{d}x \quad (H(e) = 0 \text{ et } \ln 1 = 0) \\
&= -\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x - 1)\mathrm{d}x \\
&= -\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \mathrm{d}x + (\mathrm{e} - 1) \\
&= -1 + \mathrm{e} - 1 \quad \left(\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \mathrm{d}x = 1\right) \\
&= \boxed{\mathrm{e} - 2}
\end{aligned}$$

**0.5 pt** **c)** L'aire du domaine plan délimité par la courbe $(C)$, la droite $(\Delta)$ et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est :

$\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} |f(x) - x| \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} (x - f(x)) \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \mathrm{d}x = \boxed{\mathrm{e} - 2 \approx 0.7(u.a.)}$

## Partie III

On considère la suite numérique $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

**0.75 pt** **1 -** Montrons, par récurrence, que $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

➥ Pour $n = 0$ on a $u_0 = 2$, donc $1 \leqslant u_0 \leqslant 2$

➥ Soit $n \in \mathbb{N}$

❖ On suppose que : $1 \leqslant u_n \leqslant 2$

❖ Montrons que : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$

On sait que $f$ est croissate sur l'intervalle $]0; +\infty[$

Donc $1 \leqslant u_n \leqslant 2 \Rightarrow f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(2) \Rightarrow 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$

Car $f(2) - 2 = -(\ln 2)^2 \leqslant 0 \Rightarrow f(2) \leqslant 2$

Alors : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ 1 \leqslant u_n \leqslant 2}$

**0.5 pt** **2 -** Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = -(\ln(u_n))^2 \leqslant 0$

Donc la suite $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$

**0.75 pt** **3 -** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée par 1, donc $(u_n)$ est convergente Et on a :

➪ $f$ est une fonction continue sur l'intervalle $[1; 2]$

➪ $f$ est une fonction strictement croissante sur l'intervalle $[1; 2]$

➪ On a $f([1; 2]) = [f(1); f(2)] \subset [1; 2]$ ; car $f(2) \leqslant 2$

➪ $u_0 = 2 \in [1; 2]$

➪ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite $l$

D'où : $l \in [1; 2]$ ; et $f(l) = l$

Et on a : $f(l) = l \Leftrightarrow l - (\ln l)^2 = l \Leftrightarrow \ln l = 0 \Leftrightarrow l = 1$

Par suite : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$

FIN