Exercice 1 — Session : NORMAL 2008 — 3 Pts

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les deux points $A(0,-1,1)$ et $B(1,-1,0)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$$

1 - Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,0,2)$ et que son rayon est $\sqrt{3}$ et vérifier que A appartient à (S). — **1,25 pt**

2 - Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{OA}\wedge\vec{OB}$ et montrer que $x+y+z=0$ est une équation cartésienne du plan (OAB). — **1,25 pt**

3 - Montrer que le plan (OAB) est tangent à la sphère (S) au point A. — **0,5 pt**

Exercice 2 — Session : NORMAL 2008 — 3 Pts

1 - Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation — **1 pt**

$$z^2-6z+34=0$$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a=3+5i \quad , \quad b=3-5i \quad \text{et} \quad c=7+3i.$$

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $4-2i$.

a) Montrer que $z'=z+4-2i$ et vérifier que C est l'image du point A par la translation T . — **0,75 pt**

b) Montrer que $\dfrac{b-c}{a-c}=2i$ — **0,5 pt**

c) En déduire que le triangle ABC est rectangle et que $BC=2AC$. — **0,75 pt**

Exercice 3 — Session : NORMAL 2008 — 3 Pts

Une urne contient six boules rouges et trois boules vertes(les boules sont indiscernables au toucher).

1 - On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

a) Calculer la probabilité de tirer deux boules rouges et une verte. — **1 pt**

b) Montrer que la probabilité de tirer une boule verte au moins est $\dfrac{16}{21}$ — **1 pt**

2 - On considère dans cette question l'épreuve suivante : on tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne.

Calculer la probabilité de tirer trois boules rouges . — **1 pt**

Exercice 4 — Session : NORMAL 2008 — 11 Pts

I- Soit g la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = x - 2\ln x$$

0,5 pt **1 - a)** Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

0,5 pt **b)** Montrer que g est décroissante sur $]0,2]$ et croissante sur $[2,+\infty[$.

0,5 pt **2 -** En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$ (remarquer que $g(2) > 0$)

II- On Considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - (\ln x)^2$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

0,75 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement .

2 - a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$

0,5 pt (on pourra poser $t = \sqrt{x}$, on rappelle que : $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$)

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

0,75 pt (remarquer que : $f(x) = x \quad 1 - \dfrac{(\ln x)^2}{x}\Big)$)

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$ puis en déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de

0,5 pt $+\infty$, une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y = x$.

0,5 pt **d)** Montrer que la courbe (C) est au-dessous de la droite (Δ) .

3 - a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ et montrer que f est strictement

0,75 pt croissante sur $]0,+\infty[$

0,25 pt **b)** Dresser le tableau de variations de la fonction f .

c) Montrer que $y = x$ est une équation cartésienne de la tangente à la courbe (C) au

0,5 pt point d'abscisse 1.

4 - Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$ et que

0,5 pt $\dfrac{1}{e} < \alpha < \dfrac{1}{2}$ (on admet que : $(\ln 2)^2 < \frac{1}{2}$).

5 - Tracer la droite (Δ) et la courbe (C) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

(on admet que $I(e,e,-1)$ est une point d'inflexion de la courbe (C) et on prendra $e \approx 2.7$).

1 pt

6 - a) Montrer que : $H : x \longrightarrow x\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction

0,5 pt $\ln : x \longrightarrow \ln x$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ puis montrer que $\displaystyle\int_1^e \ln x\ dx = 1$.

0,75 pt **b)** En utilisant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^e (\ln x)^2\ dx = e - 2$.

c) Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), la droite (Δ) et les deux

0,5 pt droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

0,5 pt III- On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

0,75 pt **1 -** Montrer que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (vous pouvez utiliser le résultat de la question II)3-a))

0,5 pt **2 -** Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

0,75 pt **3 -** En déduire que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

FIN