Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2008 — 3 Pts

1 - Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 8z + 17 = 0$$

1 pt

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, les points A et B d'affixes respectives $a = 4 + i$ et $b = 8 + 3i$.

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω d'affixe $\omega = 1 + 2i$ et d'ongle $\frac{3\pi}{2}$.

0.75 pt **a)** Montrer que $z' = -iz - 1 + 3i$.

0.75 pt **b)** Vérifier que l'affixe du point C image du point A par la rotation R est $c = -i$.

0.75 pt **c)** Montrer que : $b - c = 2(a - c)$, puis en déduire que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2008 — 3 Pts

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, le plan (P) d'équation : $x + 2y + z - 1 = 0$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z + 5 = 0 \ .$$

0.75 pt **1 -** Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $I(2, 3, -1)$ et son rayon est 3 .

0.5 pt **2 - a)** Montrer que la distance du point I au plan (P) est $\sqrt{6}$.

0.75 pt **b)** En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{3}$

3 - a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par I et orthogonale à (P).

0.5 pt

0.5 pt **b)** Montrer que le centre du cercle (Γ) est le point $H(1, 1, -2)$.

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2008 — 3 Pts

Une urne contient quatre boules blanches et trois boules rouges(les boules sont indiscernables au toucher)

On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne .

1 pt **1 -** Quelle est la probabilité de tirer trois boules blanches ?

1 pt **2 -** Montrer que la probabilité de tirer trois boules de même couleur est $\frac{1}{7}$.

1 pt **3 -** Quelle est la probabilité de tirer au moins une boule blanche ?

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2008 — 3 Pts

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{2u_n + 3} \end{cases}$

1 pt **1 -** Montrer que : $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - On pose : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$ puis exprimer v_n en fonction de n . **1 pt**

b) Montrer que : $u_n = \dfrac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n) . **1 pt**

Exercice 5 — Session : RATTRAPAGE 2008 — 8 Pts

I- On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x} - 2x$

1 - Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis montrer que g est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$. **1 pt**

2 - En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ (remarquer que $g(0) = 1$) **0.75 pt**

II- On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} - 2x\right)$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1 - a) Montrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. **0,5 pt**

b) Vérifier que : $\dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{e^{2x}}{x} - 2\right) \dfrac{\ln\left(e^{2x} - 2x\right)}{e^{2x} - 2x}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$ **0,25 pt**

c) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ (on rappelle : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$). **0,5 pt**

d) En déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $-\infty$, un branche parabolique dont on précisera la direction . **0,25 pt**

2 - a) Pour tout x de $[0, +\infty[$, vérifier que :

$$1 - \frac{2x}{e^{2x}} > 0 \text{ et que } 2x + \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) = f(x).$$

0,75 pt

b) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (on rappelle : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^u}{u} = +\infty$). **0,5 pt**

c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$. **0,5 pt**

d) Montrer que : $f(x) - 2x \leqslant 0$ pour tout x de $[0, +\infty[$ et en déduire que (C) est en-dessous de (D) sur l'intervalle $[0, +\infty[$. **0,75 pt**

0,75 pt **3 - a)** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{2\left(e^{2x}-1\right)}{g(x)}$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la

0,5 pt fonction f .

4 - Tracer (C) et (D) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1 pt (On admet que la courbe (C) a deux points d'inflexions).

FIN