ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2009

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

L'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, soient les points $A(-2,2,8)$, $B(6,6,0)$, $C(2,-1,0)$ et $D(0,1,-1)$ et soit (S) l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

0.75 **1 - Déterminons le triple des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$ et en déduire que $x + 2y + 2z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OCD)**

✔ **Déterminons le triple des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$**

On a : $\overrightarrow{OC}(2;-1;0)$ et $\overrightarrow{OD}(0;1;-1)$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \vec{i} - (-2)\vec{j} + (2-0)\vec{k}$$

$$= \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

par conséquence : $\boxed{\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}$

✔**En déduire que $x + 2y + 2z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OCD)**

L'équation cartésienne du plan (OCD) s'écrit sous la forme : $(OCD) : ax + by + cz + d = 0$

Et on a $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}(1;2;2)$ est un vecteur normal au plan (OCD), donc

$(OCD) : x + 2y + 2z + d = 0$

Or $O \in (OCD)$, donc $x_O + 2y_O + 2z_O + d = 0$, donc $d = 0$

Par conséquence $\boxed{(OCD) \ : \ x + 2y + 2z = 0}$

0.5 **2 - Vérifions que (S) est la sphère de centre $\Omega(2,4,4)$ et de rayon 6**

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace

$M \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

et on a : $\overrightarrow{AM}(x-(-2); y-2; z-8)$ *et* $\overrightarrow{BM}(x-6; y-6; z-0)$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-6)+(y-2)(y-6)+(z-8)z = 0$

$\Leftrightarrow x^2-6x+2x-12+y^2-6y-2y+12+z^2-8z = 0$

$\Leftrightarrow x^2-4x+y^2-8y+z^2-8z = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2-4+(y-4)^2-16+(z-4)^2-16 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2+(z-4)^2 = 36 = 6^2$

D'où : $\boxed{(S) \text{ est la sphère de centre } \Omega(2,4,4) \text{ et de rayon } R = 6}$

0.5 **3 - a) Calculons la distance du point Ω au plan (OCD) .**

On a $d(\Omega;(OCD)) = \dfrac{|x_\Omega + 2y_\Omega + 2z_\Omega|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \dfrac{|2+2\times 4+2\times 4|}{\sqrt{9}} = \dfrac{|2+8+8|}{3} = \dfrac{|18|}{3} = 6$

Par conséquence $\boxed{d(\Omega;(OCD)) = 3}$

0.5 **b) En déduire que le plan (OCD) est tangent à la sphère (S)**

On a : $d(\Omega;(OCD)) = 6 = R$

Donc le plan (OCD) est tangent à la sphère (S).

0.75 **c) Vérifions que : $\overrightarrow{OA}\ .\ \overrightarrow{OB} = 0$ puis en déduire que le point O est le point de contact de la sphère (S) et le plan (OCD)**

✔**Vérifions que : $\overrightarrow{OA}\ .\ \overrightarrow{OB} = 0$**

On a : $\overrightarrow{OA}(-2,2,8)$ et $\overrightarrow{OB}(6,6,0)$ donc : $\overrightarrow{OA}\ .\ \overrightarrow{OB} = (-2)\times 6+2\times 6+8\times 0 = (-12)+12+0 = 0$

Alors $\boxed{\overrightarrow{OA}\ .\ \overrightarrow{OB} = 0}$

✔**En déduire que le point O est le point de contact de la sphère (S) et le plan (OCD)**

On a : $\overrightarrow{OA}\ .\ \overrightarrow{OB} = 0$ donc $O \in (S)$ et on aussi $O \in (OCD)$ alors puisque le plan (OCD) est tangent à la sphère (S) ; en déduire que O est le point de contact de la sphère (S) et le plan (OCD).

Exercice 2 : (3 pts)

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, soient les points $A(a = 2-2i)$, $B(b = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i)$ et $C(c = 1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i)$

1 **1 - Écrivons les deux nombres complexes a et b sous forme trigonométrique**

✓ On a $|a| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, donc $a = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

Par conséquence $\boxed{a = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)}$

✓ Et On a : $|b| = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$, donc $b = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 1\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

D'où : $\boxed{b = 1\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)}$

2 - Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$ et soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z' l'image de M par la rotation R

0.75 **a) Montrons que $z' = bz$**

Ona : $R(M) = M' \Leftrightarrow z' - 0 = e^{i\frac{5\pi}{6}}(z - 0) \Leftrightarrow z' = \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) z$

$$\Leftrightarrow z' = 1\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) z = bz$$

Par conséquence $\boxed{z' = bz}$

0.5 **b) Vérifions que le point C est l'image du point A par la rotation R .**

On a : $z' = bz$

$ba = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(2 - 2i) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \times 2 + \frac{-\sqrt{3}}{2} \times (-2i) + \left(\frac{1}{2}i\right) \times 2 + \left(\frac{1}{2}i\right) \times (-2i)$

$= -\sqrt{3} + \sqrt{3}i + i + 1 = 1 - \sqrt{3} + \left(\sqrt{3} + 1\right) i = c$ (car $i^2 = -1$)

Donc $\boxed{R(A) = C}$

0.75 **3 - Mq : $\arg c \equiv \arg a + \arg b\ [2\pi]$ puis en déduire un argument du nombre c**

✓ **Montrons que : $\arg c \equiv \arg a + \arg b\ [2\pi]$**

On a : $c = ba$ donc $\arg c \equiv \arg ab\ [2\pi] \equiv \arg a + \arg b\ [2\pi]$

D'où : $\boxed{\arg c \equiv \arg a + \arg b\ [2\pi]}$

✓ **En déduire un argument du nombre complexe c**

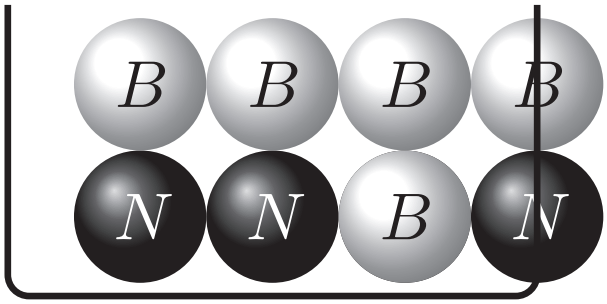
On a : $\arg a \equiv \frac{-\pi}{4}\ [2\pi]$ et $\arg b \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$ et puisque : $\arg c \equiv \arg a + \arg b\ [2\pi]$

Alors : $\arg c \equiv \frac{-\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

D'où : $\boxed{\arg c \equiv \frac{7\pi}{12}\ [2\pi]}$

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient *trois* boules blanches, *quatre* boules noires et *cinq* boules rouges indiscernables au toucher



Dans cette exercice, on va utiliser les combinaisons C_n^p

On tire au hasard et simultanément *trois* boules de l'urne

Donc $Card(\Omega) = C_{12}^3 = \dfrac{12!}{3!(12-3)!} = \dfrac{12!}{3! \times 9!} = \dfrac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{3! \times 9!} = \dfrac{132}{6} = 220$

1.5 **1 -** On a les deux évènement suivants :

A : Tirer trois boules en même couleurs

B : Tirer trois boules de couleurs différentes deux à deux

✓ **Montrons que :** $P(A) = \dfrac{3}{44}$

L'événement A est équivalent a tirer trois boules blanches ou trois boules noires ou trois boules rouges

Donc : $p(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \dfrac{C_3^3 + C_4^3 + C_5^3}{220} = \dfrac{1+4+10}{220} = \dfrac{15}{220}$

Donc $\boxed{p(A) = \dfrac{3}{44}}$

✓ **Montrons que :** $P(B) = \dfrac{3}{11}$

L'événement B est équivalent a tirer une boule blanche et une boule noire et une boule rouge

Donc : $p(B) = \dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{C_3^1 \times C_4^1 \times C_5^1}{220} = \dfrac{3 \times 4 \times 5}{220} = \dfrac{60}{220}$

Donc $\boxed{p(B) = \dfrac{3}{11}}$

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de trois boules associe le nombre de couleurs que portent ces boules.

0.25

a) Déterminons les valeurs prises par la variable aléatoire X

➥ Si les trois boules tirées ont le même couleur, donc X peut avoir la valeur 1

➥ Si les trois boules tirées contient deux couleurs différentes,

donc X peut avoir la valeur 2

➥ Si les trois boules tirées contient trois couleurs différentes,

donc X peut avoir la valeur 3

D'où : $\boxed{X(\Omega) = \{1; 2; 3\}}$

1.25

b) Déterminons la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculons l'espérance mathématique $E(X)$.

✓Déterminons la loi de probabilité de la variable aléatoire X

➥ L'événement "$X = 1$" est équivalent a tirer trois boules blanches ou trois boules noires ou trois boules rouges, donc "$(X = 1) = A$"

Alors $\boxed{p(X = 1) = p(A) = \frac{3}{44}}$

➥ L'événement "$X = 2$" est équivalent a tirer trois boules dont il ont deux couleurs différentes, donc "$(X = 2) = (2B \; et \; 1\bar{B} \; ou \; 2N \; et \; 1\bar{N} \; ou \; 2R \; et \; 1\bar{R})$"

Donc : $p(X = 2) = \frac{Card(X = 2)}{Card(\Omega)} = \frac{C_3^2 \times C_9^1 + C_4^2 \times C_8^1 + C_5^2 \times C_7^1}{220}$

$= \frac{3 \times 9 + 6 \times 8 + 10 \times 7}{220}$

$= \frac{145}{220}$

Alors : $\boxed{p(X = 2) = \frac{29}{44}}$

➥ L'événement "$X = 3$" est équivalent a tirer trois boules de couleurs différentes, donc "$(X = 3) = B$"

Alors $\boxed{p(X = 3) = p(B) = \frac{3}{11}}$

D'où la loi de probabilité de la variable aléatoire X

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{44}$	$\frac{29}{44}$	$\frac{3}{11}$

✓ Calculons l'espérance mathématique $E(X)$

On sait que $E(X) = \sum x_i \times p(X = x_i)$

Donc : $E(X) = 1 \times p(X = 1) + 2 \times p(X = 2) + 3 \times p(X = 3)$

$$= \frac{3}{44} + 2 \times \frac{29}{44} + 3 \times \frac{3}{11}$$
$$= \frac{97}{44}$$

D'où : $\boxed{E(X) = \frac{97}{44}}$.

Exercice 4 : (2 pts)

Ona : $J = \int_{-2}^{-1} \ln(2x+6)\, dx$ et $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3}\, dx$

0.25 **1 - a) Vérifions que : $\frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}$ pour tout réel x tel que $x \neq -3$**

On a : $\frac{x}{x+3} = \frac{x+3-3}{x+3} = \frac{x+3}{x+3} - \frac{3}{x+3}$

$= 1 - \frac{3}{x+3}$

D'où : $\boxed{\frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}; \forall\ x \in \mathbb{R}\{-3\}}$

0.75 **b) Montons que : $I = 1 - 3\ln 2$**

On a : $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3}\, dx = \int_{-2}^{-1} 1 - \frac{3}{x+3}\, dx = \int_{-2}^{-1} 1 - 3\frac{(x+3)'}{x+3}\, dx$

$= \left[x - 3\ln|x+3|\right]_{-2}^{-1} = -1 - 3\ln 2 - (-2 - 3\ln 1)$

$= -1 - 3\ln 2 + 2 = 1 - 3\ln 2$

D'où : $\boxed{I = 1 - 3\ln 2}$

1 **2 - Montons que : $J = -I$**

On pose : $U(x) = \ln(2x+6)$ et $V'(x) = 1$

Alors : $U'(x) = \frac{(2x+6)'}{2x+6} = \frac{2}{2x+6} = \frac{1}{x+3}$ et $V(x) = x$

D'après la formule de l'intégration par partie :

$J = \int_{-2}^{-1} 1 \times \ln(2x+6)\mathrm{d}x = [x\ln(2x+6)]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3}\mathrm{d}x$

$= -1 \times \ln 4 - (-2)\ln 2 - I$

$= -\ln 2^2 + 2\ln 2 - I$

$= -2\ln 2 + 2\ln 2 - I$

$= -I$

D'où : $\boxed{J = -I}$

Problème : (9 pts)

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)$

Et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$(unité : 1 cm)

I- 1- **Vérifions que :** $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$ **pour tout** x **de** $\mathbb{R}$ **puis en déduire**

0.75 **que l'ensemble de définition de la fonction** f **est** $\mathbb{R}$ **et que :**

$$(\forall\ x \in \mathbb{R}); \qquad 1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$$

✍ **Vérifions que :** $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$ **pour tout** x **de** $\mathbb{R}$

Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x}\right)^2 - 2\sqrt{e^x} + 1 + 1$

$$= \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$$

Alors $\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R} : e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1}$

✍ **En déduire que :** $D_f = \mathbb{R}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0\ et\ e^x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 > 0\} = \mathbb{R}$

Alors : $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

✍ **En déduire que :** $(\forall\ x \in \mathbb{R}); \qquad 1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$

On a : $\forall\ x \in \mathbb{R}; e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 > 0$

Donc : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0 \Rightarrow e^x(1 - \frac{2\sqrt{e^x}}{e^x} + \frac{2}{e^x}) > 0 \Rightarrow 1 - \frac{2\sqrt{e^x}}{e^x} + \frac{2}{e^x} > 0$

(car $\forall\ x \in \mathbb{R}; e^x > 0$).

D'où : $\boxed{1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0}$

0.75 2- **Calculons :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **; puis montrons que :** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ln 4$ **et interprétons le résultat géométriquement**

➠**Calculons :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2\ln\left((\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1\right)$

$$= \lim_{t \to +\infty} 2\ln t = +\infty \quad Car \quad \lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$$

$$Avec \quad t = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1, \quad on\ a\ quand \quad x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty$$

Finalement $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

➠**Montrons que :** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ln 4$

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) = 2\ln 2 = \ln 4$

$$Car \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = 2$$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ln 4}$

➠**L'interprétation géométrique :**

On : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ln 4$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation : $y = \ln 4$ au voisinage de $-\infty$

1

3- a- **Montrons que :** $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$ **et vérifions que :** $f'(0)=0$:

Ona : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composant de deux fonctions dérivables

Et, pour tout x de $\mathbb{R}$; on a : $f'(x) = \left(2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x}+2\right)\right)' = 2\dfrac{\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)'}{e^x-2\sqrt{e^x}+2}$

$$= 2\frac{e^x - 2\dfrac{\left(e^x\right)'}{2\sqrt{e^x}}}{e^x-2\sqrt{e^x}+2} = 2\frac{e^x-\dfrac{e^x}{\sqrt{e^x}}}{e^x-2\sqrt{e^x}+2} = 2\frac{e^x-\sqrt{e^x}}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$$

$$= \frac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$$

Finalement $\boxed{\forall\, x\in\mathbb{R}; f'(x) = \dfrac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}}$

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{2\sqrt{e^0}\left(\sqrt{e^0}-1\right)}{\left(\sqrt{e^0}-1\right)^2+1} = \frac{2\sqrt{1}\left(\sqrt{1}-1\right)}{\left(\sqrt{1}-1\right)^2+1} = 0$$

Alors : $\boxed{f'(0)=0}$

b- **Étudions le signe de** $\sqrt{e^x}-1$ **sur** $\mathbb{R}$ **et en déduire que la fonction** f **est**

1 **croissante sur l'intervalle** $[0,+\infty[$ **et décroissante sur l'intervalle** $]-\infty,0]$.

✍ **Étudions le signe de** $\sqrt{e^x}-1$

Soit $x\in\mathbb{R}$;

$\sqrt{e^x}-1\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x}\geq 1 \Leftrightarrow e^x\geq 1 \Leftrightarrow x\geq \ln 1 \Leftrightarrow x\geq 0$

et $\sqrt{e^x}-1=0\Leftrightarrow x=0$

Alors : $\boxed{\forall x\in]-\infty,0]; \sqrt{e^x}-1\leqslant 0 \text{ et } \forall x\in[0,+\infty[; \sqrt{e^x}-1\geq 0}$

✍ **En déduire que la fonction** f **est croissante sur l'intervalle** $[0,+\infty[$ **et décroissante sur l'intervalle** $]-\infty,0]$

Le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ est celui de $\sqrt{e^x}-1$ et puisque $\forall x\in]-\infty,0]; \sqrt{e^x}-1\leqslant 0$ et $\forall x\in[0,+\infty[; \sqrt{e^x}-1\geq 0$

Alors : $\forall x\in]-\infty,0]; f'(x)\leqslant 0$ et $\forall x\in[0,+\infty[; f'(x)\geq 0$

D'où : $\boxed{f \text{ est croissante sur l'intervalle } [0,+\infty[\text{ et décroissante sur l'intervalle }]-\infty,0]}$

0.25

4- a- **Vérifions que :** $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x) = 2x+2\ln\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{e^x}}+\dfrac{2}{e^x}\right)$

On a : $\forall x\in\mathbb{R}; f(x) = 2\ln(e^x-2\sqrt{e^x}+2) = 2\ln\left(e^x(1-\dfrac{2}{\sqrt{e^x}}+\dfrac{2}{e^x})\right)$

$$= 2\ln(e^x) + 2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right) = 2x+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$$

Donc : $\boxed{f(x) = 2x+2\ln\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{e^x}}+\dfrac{2}{e^x}\right)}$

0.5

b- **Montrons que : la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage $+\infty$**

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 2x + 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) - 2x$$
$$= 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) = 2\ln 1 = 0$$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{e^x}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{2}{\sqrt{e^x}} + \dfrac{2}{e^x} = 1$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 0}$

D'où: : $\boxed{(\mathcal{C}_f) \text{ admet une asymptote oblique } (D) : \ y = 2x \text{ au voisinage de } +\infty}$

0.25

5- a) **Vérifions que** $\forall x \in \mathbb{R}; e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}; e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = \sqrt{e^x}^2 - 3\sqrt{e^x} + 2$

On pose : $\sqrt{e^x} = t$ donc : $\sqrt{e^x}^2 - 3\sqrt{e^x} + 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$

Donc : $t = 1$ ou $t = 2$ Alors : $t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$

D'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}; e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)}$

0.5

b) **Étudions le signe de $\sqrt{e^x} - 2$ et de $\left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$ sur $\mathbb{R}$.**

✍ Étudions le signe de $\sqrt{e^x} - 2$

Soit $x \in \mathbb{R}$;

$\sqrt{e^x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x} \geq 2 \Leftrightarrow e^x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \ln 4$

et $\sqrt{e^x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 4$

Alors : $\boxed{\forall x \in]-\infty, \ln 4]; \sqrt{e^x} - 2 \leqslant 0 \text{ et } \forall x \in [\ln 4, +\infty[; \sqrt{e^x} - 2 \geq 0}$

✍ **Le signe de $(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$ sur $\mathbb{R}$**

x	$-\infty$		0		$\ln 4$		$+\infty$
$\sqrt{e^x} - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\sqrt{e^x} - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(\sqrt{e^x}-1)(\sqrt{e^x}-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

0.25

c) **En déduire que : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leqslant \sqrt{e^x}$ pour tout $x \in [0, \ln 4]$.**

On a : $\forall x \in [0, \ln 4]; (\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2) \leqslant 0$

Càd : $e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 \leqslant 0$

Donc : $e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 + \sqrt{e^x} \leqslant \sqrt{e^x}$

D'où : $\boxed{\forall x \in [0, \ln 4]; e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leqslant \sqrt{e^x}}$

0.5 d) **Montrons que** $\forall x \in [0, \ln 4]; f(x) \leqslant x$

On a : $0 < e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leqslant \sqrt{e^x}$

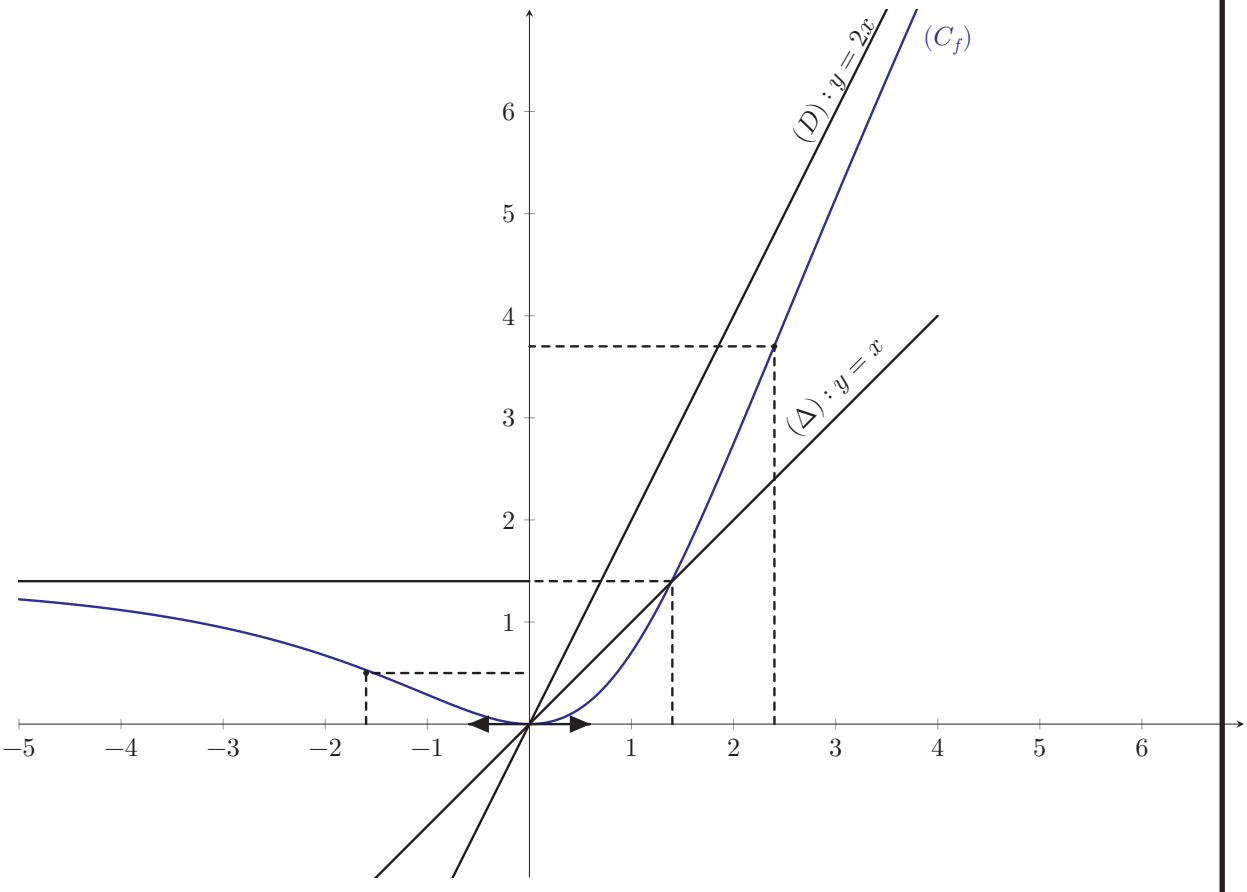
Donc $\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leqslant \ln(\sqrt{e^x})$

$\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leqslant \frac{1}{2}x$

$2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leqslant x$

Par conséquence $\boxed{\forall x \in [0, \ln 4];\ f(x) \leqslant x}$

0.75 6- **Construisons la courbe** $(\mathcal{C}_f)$ **et la droite** $(\mathbb{D})$ **dans le repère** $\left(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$



II- Soit la suite numérique $(\mathcal{U}_n)$ définie par $\mathcal{U}_0 = 1$ et la relation $\mathcal{U}_{n+1} = f(\mathcal{U}_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

0.75 1- **Montrons, par récurrence, que** $0 \leq \mathcal{U}_n \leq \ln(4)$ **pour tout** n **de** $\mathbb{N}$

✓ Pour $n = 0$ on a $u_0 = 1$ donc $0 \leq \mathcal{U}_0 \leq \ln(4)$

✓ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leq u_n \leq \ln(4)$ et on montre que $0 \leq u_{n+1} \leq \ln(4)$

On a $0 \leq u_n \leq \ln(4)$ et f une fonction dérivable (d'après la question **2-**) donc continue et strictement croissante sur $[0, \ln(4)]$

Donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(\ln(4))$ et puisque $f(\ln(4)) = \ln(4)$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(0) = 0$

Alors $0 \leq u_{n+1} \leq \ln(4)$

✓ Alors d'après le principe de récurrence on a : $\boxed{0 \leq u_n \leq \ln(4), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$

0.75 2- **Montrons que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante**

D'après la question **5-b)** on a $f(x) \leq x$ pour tout $x \in [0, \ln(4)]$

Et d'après la question précédente on a $u_n \in [0, \ln(4)]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Alors $f(u_n) \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

D'où $\boxed{(u_n) \text{ est une suite décroissante}}$

1 3- **Déduisons que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est convergente et calculons sa limite**

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0

Alors : $\boxed{\text{la suite } (\mathcal{U}_n) \text{ est convergente}}$

✓ **Calcule de $\lim u_n$**

Soit $x \in [0, \ln(4)]$;

$$f(x) = x \Leftrightarrow 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) = x \Leftrightarrow \ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) = \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = e^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 - \sqrt{e^x} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \ln 4 \ (d'aprs\ la\ question\ I - 5 - b)$$

Puisque $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante alors $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n \leq u_0 = 1$ donc $\lim u_n \leq 1$

D'où $\boxed{\lim u_n = 0}$

6l

FIN