Exercice 1 — Session : NORMAL 2009 — 3 Pts

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les points $A(-2,2,8)$, $B(6,6,0)$, $C(2,-1,0)$ et $D(0,1,-1)$ et (S) l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}=0$.

1 - Déterminer le triple des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}$ et en déduire que $x+2y+2z=0$ est une équation cartésienne du plan (OCD) . — **0.75 pt**

2 - Vérifier que (S) est la sphère de centre $\Omega(2,4,4)$ et de rayon 6 . — **0.5 pt**

3 - a) Calculer la distance du point Ω au plan (OCD) . — **0.5 pt**

b) En déduire que le plan (OCD) est tangent à la sphère (S) . — **0.5 pt**

c) Vérifier que : $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB}=0$ puis en déduire que le point O est le point de contact de la sphère (S) et le plan (OCD) . — **0.75 pt**

Exercice 2 — Session : NORMAL 2009 — 3 Pts

On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives : $a=2-2i$, $b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ et $c=1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i$.

1 - Écrire sous forme trigonométrique chacun des deux nombres complexes a et b . — **1 pt**

2 - On considère la rotation R de centre le point O et d'ongle $\dfrac{5\pi}{6}$.

a) Soit z l'affixe d'un point M du plan complexe et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R . Montrer que : $z'=bz$. — **0.75 pt**

b) Vérifier que le point C est l'image du point A par la rotation R . — **0.5 pt**

3 - Montrer que : $\arg c\equiv\arg a+\arg b\ [2\pi]$ puis en déduire un argument du nombre complexe c — **0.75 pt**

Exercice 3 — Session : NORMAL 2009 — 3 Pts

Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 5 boules rouges (les boules sont indiscernables au toucher)

On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

1 - On considère les deux évènements suivants :

A : Tirer trois boules de même couleurs .

B : Tirer trois boules de couleurs différentes deux à deux

Montrer que : $P(A)=\dfrac{3}{44}$ et $P(B)=\dfrac{3}{11}$ — **1.5 pt**

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de trois boules associe le nombre de couleurs que portent ces boules.

0.25 pt **a)** Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X .

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$. 1.25 pt

Exercice 4 — Session : NORMAL 2009 — 2 Pts

On pose : $J = \int_{-2}^{-1} \ln(2x+6)\,dx$ et $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3}\,dx$

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que : $\frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}$ pour tout réel x tel que $x \neq -3$

0.75 pt **b)** Montrer que : $I = 1 - 3\ln 2$.

1 pt **2 -** En utilisant une intégration par parties, montrer que : $J = -I$.

Exercice 5 — Session : NORMAL 2009 — 9 Pts

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)$$

(C) désigne la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I-**1 -** Vérifier que : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$ et que :

$$(\forall\, x \in \mathbb{R}) \qquad 1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$$

0.75 pt

2 - Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln 4$ et interpréter le résultat géométriquement 0.75 pt

1 pt **3 - a)** Montrer que : $f'(x) = \frac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x} - 1\right)}{\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et vérifier que $f'(0) = 0$.

b) Étudier le signe de $\sqrt{e^x} - 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$. 1 pt

0.25 pt **4 - a)** Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = 2x + 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage $+\infty$. 0.5 pt

0.25 pt **5 - a)** Vérifier que : $e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.5 pt **b)** Étudier le signe de $\sqrt{e^x} - 2$ et de $\left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$ sur $\mathbb{R}$.

0.25 pt **c)** En déduire que : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leqslant \sqrt{e^x}$ pour tout $x \in [0, \ln 4]$.

0.5 pt **d)** Montrer que : $f(x) \leqslant x$ pour tout $x \in [0, \ln 4]$.

0.75 pt **6 -** Tracer la courbe (C)

(on admettra que la courbe (C) possède deux points d'inflexions dont l'abscisse de l'un est inférieure à -1 et l'abscisse de l'autre est supérieure à 2, la détermination de ces deux points n'est pas demandée et on prendra $\ln 4 \approx 1.4$) .

II- Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} .$$

On pourra, ci-après, utiliser les résultats de l'étude de la fonction f .

0.75 pt **1 -** Montrer que : $0 \leq u_n \leq \ln 4$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **2 -** Montrer que la suite (u_n) est décroissante .

1 pt **3 -** En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite .

FIN