Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2009 — 3 Pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère le point $A(2,2,-1)$, le plan (P) d'équation $2x+y+2z-13=0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1,0,1)$ et de rayon 3.

0.75 pt **1 - a)** Montrer que $x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S) et vérifier que A appartient à (S).

0.75 pt **b)** Calculer la distance du point Ω au plan (P) puis en déduire que le plan (P) est tangent à la sphère (S).

2 - Soit (D) la droite passant par le point A et perpendiculaire au plan (P).

0.75 pt **a)** Démontrer que $\vec{u}(2,1,2)$ est un vecteur directeur de la droite (D) et que $(6,-6,-3)$ est le triplet de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}$.

0.75 pt **b)** Calculer $\dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$ puis en déduire que la droite (D) est tangente à la sphère (S) en A.

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2009 — 3 Pts

1 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-6z+25=0$.

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives : $a=3+4i$, $b=3-4i$, $c=2+3i$ et $d=5+6i$.

0.5 pt **a)** Calculer $\dfrac{d-c}{a-c}$ puis en déduire que les points A, C et D sont alignés.

0.5 pt **b)** Montrer que le nombre $p=3+8i$ est l'affixe du point P image du point A par l'homothétie h de centre B et de rapport $\dfrac{3}{2}$.

1 pt **c)** Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $\dfrac{d-p}{a-p}$ puis en déduire que $\dfrac{\pi}{4}$ est une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}}\right)$ et que $PA=\sqrt{2}PD$.

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2009 — 3 Pts

Une urne contient *sept* boules noires et *deux* boules blanches.

(***les boules sont indiscernables au toucher***)

On tire au hasard, successivement et sans remise, *deux* boules de l'urne.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches restantes dans l'urne après le tirage des deux boules.

0.5 pt **1 -** Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

1.5 pt **2 -** Montrer que $p(X=0)=\dfrac{1}{36}$ et $p(X=1)=\dfrac{7}{18}$.

1 pt **3 -** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2009 — 3 Pts

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+4u_n}{7-2u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 pt **1 -** Vérifier que $1 - u_{n+1} = \dfrac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et montrer par récurrence que $1 - u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$

2 - On pose $v_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{6}$, puis exprimer v_n en fonction de n.

1 pt **b)** Montrer que $u_n = \dfrac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis en déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice 5 — Session : RATTRAPAGE 2009 — 2 Pts

1 pt **1 -** Déterminer les fonctions primitives de la fonction $x \mapsto 2x\left(x^2-1\right)^{2009}$ sur $\mathbb{R}$ et vérifier que :

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2x\left(x^2-1\right)^{2009}\ dx = \frac{1}{2010}.$$

1 pt **2 -** En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)\ dx = 6\ln 3 - 2$.

Exercice 6 — Session : RATTRAPAGE 2009 — 6 Pts

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$.

et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que : $f(x) = x\left(\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$ pour tout réel x.

1 pt **b)** Montrer que la fonction f est paire et que $f(x) - x = \dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ pour tout réel x.

1 pt **c)** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 0$ puis en déduire que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

0.5 pt **2 -** Montrer que la courbe (C) est au-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

1 pt **3 - a)** Montrer que : $f'(x) = \dfrac{e^{4x} - 1 + 4xe^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$ pour tout réel x et vérifier que $f'(0) = 0$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $e^{4x} - 1 \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0,+\infty[$ puis en déduire que : $e^{4x} - 1 + 4xe^{2x} \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0,+\infty[$.

0.5 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

1 pt **4 -** Construire la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(on admettra que la courbe possède deux points d'inflexion que l'on ne demande pas de préciser).