ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2010

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ *; on considère les points* $A\,(-1,0,3)$ *;* $B\,(3,0,0)$ *et* $C\,(7,1,-3)$ *et* (S) *la sphère d'équation* $x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$

1 pt

1 - on sait que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C-x_A \\ y_C-y_A \\ z_C-z_A \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

Alors

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}=3\vec{i}+4\vec{k}$$

D'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+0\vec{j}+4\vec{k}$

Soit $M(x,y,z)\in(ABC)$, et on sait que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à (ABC).

Donc les deux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux ; c'est à dire $\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$

où $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ z-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=3(x+y)+0y+4(z-3)=3x+4y-9$

Alors $3x+4y-9=0$

D'où l'équation cartésienne du plan (ABC) est $(ABC):\ 3x+4y-9=0$

0.5 pt **2 -** On a $(S): \; x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$, donc

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-6x-2y-15 &= 0 \\ (x^2-6x+9)+(y^2-2y+1)+z^2-15-9-1 &= 0 \\ (x-3)^2+(y-1)^2+(z-0)^2 &= 25 \end{aligned}$$

Alors (S) est la sphère de centre $\Omega(3,1,0)$ et de rayon $R=\sqrt{25}=5$

3 - *Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).*

0.5 pt **a)** Soit $M(x,y,z)\in(\Delta)$, et on a $\Omega\in(\Delta)$. Donc $\overrightarrow{\Omega M}$ est un vecteur directeur à (Δ).

et on a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à (ABC).

Puisque (Δ) est perpendiculaire à (ABC), donc $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ;

c'est à dire $\quad \exists\, t\in\mathbb{R} \;:\; \overrightarrow{\Omega M}=t\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$

où $\quad \overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix} x-3\\ y-1\\ z-0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$, donc $\quad \begin{cases} x-3 &= 3t\\ y-1 &= 0t\\ z-0 &= 4t\end{cases} ;\forall\, t\in\mathbb{R}$

Alors représentation paramétrique de la droite (Δ) est $\quad (\Delta):\begin{cases} x &= 3t+3\\ y &= 1\\ z &= 4t\end{cases}$

1 pt **b)** Soit $M(x,y,z)\in(\Delta)\bigcap(S)$, donc

$$\begin{cases} x &= 3t+3\\ y &= 1\\ z &= 4t\\ (x-3)^2+(y-1)^2+(z-0)^2 &= 25\end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} (3t+3-3)^2+(1-1)^2+(4t-0)^2 &= 25\\ 9t^2+16t^2 &= 25\\ 25t^2 &= 25\\ t^2 &= 1\\ t &= \pm 1\end{aligned}$$

- Pour $t=1$, on a $\begin{cases} x &= 3\times 1+3=6\\ y &= 1\\ z &= 4\times 1=4\end{cases}$ donc $E(6,1,4)$
- Pour $t=-1$, on a $\begin{cases} x &= 3\times(-1)+3=0\\ y &= 1\\ z &= 4\times(-1)=-4\end{cases}$ donc $F(0,1,-4)$

D'où la droite (Δ) coupe la sphère (S) aux deux points $E(6,1,4)$ et $F(0,1,-4)$.

Exercice 2 : (3 pts)

1 pt

1 - On a $z^2-6z+10=0$, donc le discriminant $\triangle = b^2-4ab = (-6)^2-4\times 1\times 10 = -4 < 0$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées qui sont

$$z_1 = \frac{6+i\sqrt{4}}{2} = 3+i \quad et \quad z_2 = \overline{z_1} = 3-i$$

Alors $S = \{3-i, 3+i\}$

2 - *Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct* $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ *; on considère les points A, B et C d'affixes respectives* $a = 3-i, b = 3+i$ *et* $c = 7-3i$.

Soit z l'affixe du point M et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

0.5 pt

a) On a $R(M) = M'$, donc $z'-a = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-a)$ Alors

$$\begin{aligned} z' &= \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)(z-a)+a \\ z' &= (0+i\times 1)(z-3+i)+3-i \\ z' &= iz-3i-1+3-i \end{aligned}$$

$D'o\quad z' = iz+2-4i$

0.25 pt

b) On a $R(C) = C'$, donc $c' = ic+2-4i$ Alors

$$\begin{aligned} c' &= i(7-3i)+2-4i \\ c' &= 7i+3+2-4i \end{aligned}$$

$D'o\quad c' = 5+3i$

1.25 pt

c) On a

$$\frac{c'-b}{c-b} = \frac{5+3i-3-i}{7-3i-3-i} = \frac{2+2i}{4-4i} = \frac{2(1+i)}{4(1-i)} = \frac{(1+i)^2}{2(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2(1+1)} = \frac{i}{2}$$

D'où $\frac{c'-b}{c-b} = \frac{1}{2}i$

Puisque $\frac{c'-b}{c-b} = \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$, donc $arg\left(\frac{c'-b}{c-b}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Alors $\overline{\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC'}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

D'où le triangle BCC' est rectangle en B.

Et on a

$$\begin{aligned} \left|\frac{c'-b}{c-b}\right| &= \frac{1}{2} \\ \frac{|c'-b|}{|c-b|} &= \frac{1}{2} \\ \frac{BC'}{BC} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$D'o\quad BC = 2BC'$

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient cinq boules blanches, trois boules rouges et deux boules noires (les boules sont indiscernables au toucher)

On tire au hasard et simultanément quatre boule de l'urne.

1 - *On considère les deux évènements*

A : Tirer une seule boule rouge

B : Tirer au moins une boule blanche

1 pt On a $Card(\Omega) = C_{10}^4 = 210$, donc

$$p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{C_3^1 \times C_7^3}{210} = \frac{3 \times 35}{210} = \frac{1}{2}$$

$$p(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{C_5^1 \times C_5^3 + C_5^2 \times C_5^2 + C_5^3 \times C_5^1 + C_5^4}{210} = \frac{5 \times 10 + 10 \times 10 + 10 \times 5 + 5}{210}$$
$$= \frac{205}{210}$$
$$= \frac{41}{42}$$

ou par une autre méthode ; on prend l'évènement

$\overline{B}$: Aucune boule blanche parmi les quatre boules tirées,

donc $p(\overline{B}) = \frac{Card(\overline{B})}{Card(\Omega)} = \frac{C_5^4}{210} = \frac{5}{210} = \frac{1}{42}$, Alors $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{42} = \frac{41}{42}$

2 - *Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associer le nombre de boules rouges tirées.*

0.25 pt **a)** On peut obtenir

- Aucune boule rouge parmi les quatre boules tirées, donc $X = 0$
- Une seule boule rouge parmi les quatre boules tirées, donc $X = 1$
- Deux boules rouges parmi les quatre boules tirées, donc $X = 2$
- Trois boules rouges parmi les quatre boules tirées, donc $X = 3$

D'où les valeurs prises par X sont 0, 1, 2 et 3.

1 pt **b)**

$$p(X = 0) = \frac{Card(X = 0)}{Card(\Omega)} = \frac{C_7^4}{210} = \frac{35}{210} = \frac{1}{6}$$

$$p(X = 2) = \frac{Card(X = 2)}{Card(\Omega)} = \frac{C_3^2 \times C_7^2}{210} = \frac{3 \times 21}{210} = \frac{3}{10}$$

0.75 pt **c)** On a $p(X = 1) = p(A) = \frac{1}{2}$ et $p(X = 3) = \frac{Card(X = 3)}{Card(\Omega)} = \frac{C_3^3 \times C_7^1}{210} = \frac{1 \times 7}{210} = \frac{1}{30}$

Donc

k	0	1	2	3
$p(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

Exercice 4 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par tout n de $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{2u_n} \end{cases}$

0.75 pt **1 -** Pour $n = 0$, on a $u_0 - 1 = 2 - 1 > 0$

Supposons que $u_n - 1 > 0$, pour un $n \in \mathbb{N}$ et montrons que $u_{n+1} - 1 > 0$

On a $u_{n+1} - 1 = \dfrac{3u_n - 1}{2u_n} - 1 = \dfrac{3u_n - 1 - 2u_n}{2u_n} = \dfrac{u_n - 1}{2u_n} > 0$

car $u_n - 1 > 0$, et donc $u_n > 1$

Alors $U_{n+1} - 1 > 0$

D'où $u_n - 1 > 0; \ \forall n \in \mathbb{N}$

2 - *On considère la suite numérique (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$*

1 pt **a)** On a $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{2u_{n+1} - 1} = \dfrac{\frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1}{2\frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1} = \dfrac{\frac{u_n - 1}{2u_n}}{\frac{6u_n - 2 - 2u_n}{2u_n}} = \dfrac{u_n - 1}{4u_n - 2} = \dfrac{u_n - 1}{2(2u_n - 1)}$

Donc $v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n$

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

On sait que $v_n = v_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, où $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{2u_0 - 1} = \dfrac{1}{3}$

D'où $v_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

0.75 pt **b)** On a $v_n = \dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1}$, donc

$$\begin{aligned} v_n(2u_n - 1) &= u_n - 1 \\ 2v_n u_n - v_n &= u_n - 1 \\ 2v_n u_n - u_n &= v_n - 1 \\ u_n(2v_n - 1) &= v_n - 1 \end{aligned}$$

D'o $u_n = \dfrac{v_n - 1}{2v_n - 1}; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Puisque $v_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, donc $u_n = \dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{2 \times \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$

Alors $\lim u_n = \dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \dfrac{0 - 1}{0 - 1} = 1$

Car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, c'est à dire $\lim \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$

D'où $\lim u_n = 1$

0.5 pt **3 -** *Soit (w_n) la suite numérique définie par $w_n = \ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

On a $\lim u_n = 1$, donc $\lim w_n = \lim \ln u_n = \ln 1 = 0$ (car la fonction ln est continue en 1)

Exercice 5 : (8 pts)

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

0.5 pt **1 -** On a $g'(x) = (4xe^{2x})' = 4x'e^{2x} + 4x \times (2x)'e^{2x} = 4e^{2x} + 8xe^{2x} = 8xe^{2x} + 4e^{2x}$

D'où $g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$; $\forall x \in \mathbb{R}$

0.5 pt **2 -** On a $g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc le signe de $g'(x)$ est celui de $2x+1$ (car $e^{2x} > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$)

Puisque $2x+1=0$ est équivalent à $x = -\frac{1}{2}$, donc le signe de $2x+1$ comme suit

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	

Donc $g'(x) \geq 0$; $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et $g'(x) \leq 0$; $\forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

D'où g est croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, et décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

0.5 pt **3 - a)** On a $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}$

D'où $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{e-2}{e}$

et puisque $e \simeq 2.7$, alors $e - 2 > 0$. Donc $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

0.25 pt **b)** On a g est décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, et croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$,

Donc $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ est le minimum de g sur $\mathbb{R}$, alors $g(x) \geq g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$

D'où $g(x) > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Partie II

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$, et $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé (O, i, j) (unité : 2cm)

1 pt **1 -** On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2x-1)e^{2x} + x + 1$

et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - 1 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x-1)e^{2x} + x + 1 = \lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} - e^{2x} + x + 1$

et puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = \lim\limits_{t\to-\infty} te^{t} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

0.75 pt **2 -** On a $f'(x) = \left((2x-1)e^{2x}\right)' + x' = (2x-1)'e^{2x} + (2x-1)\times(2x)'e^{2x} + 1$

$= 2e^{2x} + 4xe^{2x} - 2e^{2x} + 1$

D'où $f'(x) = g(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$

or $g(x) > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$, donc $f'(x) > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$

D'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

0.75 pt **3 - a)** On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x-1)e^{2x}+x+1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x}{x} - \dfrac{1}{x}\right)e^{2x} + \dfrac{x}{x} + \dfrac{1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)e^{2x} + 1 + \dfrac{1}{x}$

et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \dfrac{1}{x} = 2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

D'où la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction l'axe des ordonnées.

0.5 pt **b)** On a $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x-1)e^{2x} + x + 1 - (x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} - e^{2x}$

et puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} te^{t} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (x+1)) = 0$

D'où la droite $(\triangle)$ d'équation $y = x+1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.

0.5 pt **c)** Soit $M(x,y)$ le point d'intersection de la droite $(\triangle)$ d'équation $y = x+1$ et la courbe $(\mathcal{C}_f)$. Donc $x+1 = f(x)$, c'est à dire $f(x) - (x+1) = 0$

On a $f(x) - (x+1) = 0$ est équivalent à $(2x-1)e^{2x} = 0$

or $e^{2x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, donc $2x - 1 = 0$

D'où $x = \dfrac{1}{2}$ et $y = x+1 = \dfrac{1}{2}+1 = \dfrac{3}{2}$ sont les coordonnées du point d'intersection de la droite $(\triangle)$ et la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Puisque $f(x) - (x+1) = 0$ est équivalent à $(2x-1)e^{2x} = 0$, donc le signe de $f(x) - (x+1)$ est celui de $2x-1$ (car $e^{2x} > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$) ; et le signe de $2x-1$ est comme suit

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	

Donc $f(x) < x+1$ sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$, alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de la droite $(\triangle)$ sur l'intervalle $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$.

et $f(x) > x+1$ sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de la droite $(\triangle)$ sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

0.25 pt **4 - a)** On sait que l'équation cartésienne de (T) tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point O est

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

et puisque $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$, donc $y = x$

D'où $(T) : y = x$ est l'équation cartésienne de (T) tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point O.

0.25 pt **b)** On a $f'(x) = g(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$, donc $f''(x) = g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$; $\forall x \in \mathbb{R}$

D'après la question 2), on a

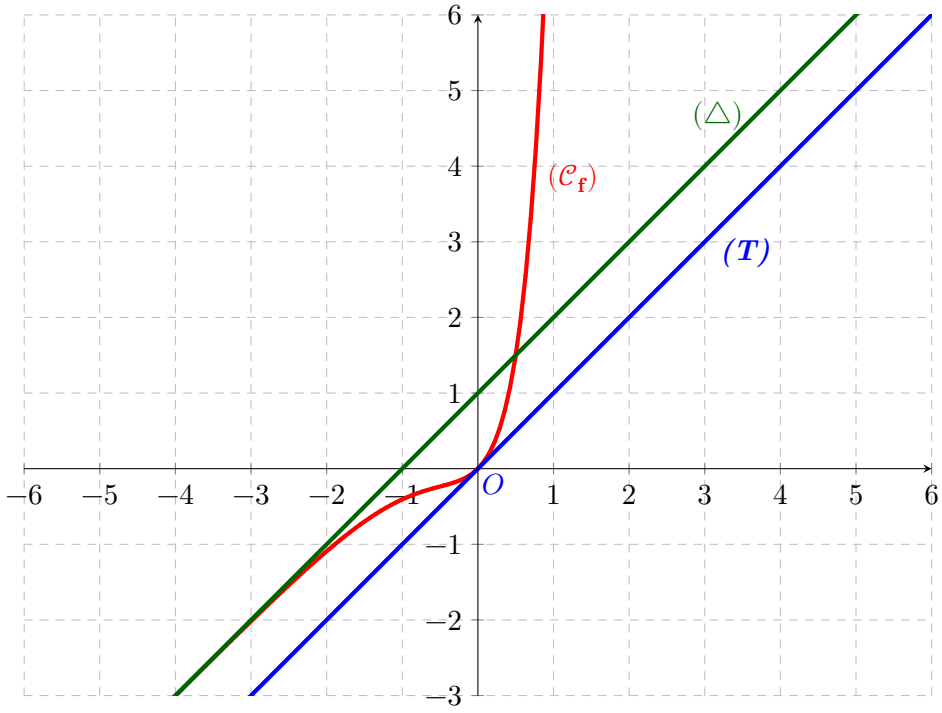
$$f''(x) \geq 0\,;\, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\quad \text{et} \quad f''(x) \leq 0\,;\, \forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$$

Alors le tableau de variation de la fonction f'' est

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

D'où La courbe $(\mathcal{C}_f)$ possède un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

0.75 pt **5 -**



1 pt **6 - a)** Pour calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx$ à l'aide d'une intégration par parties, on pose

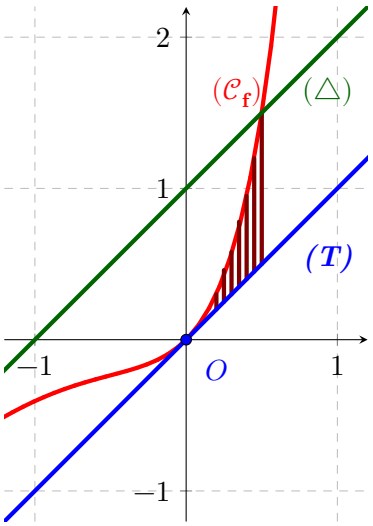
$u(x) = 2x-1$ et $v'(x) = e^{2x}$, donc $u'(x) = 2$et $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$, alors

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx = \left[(2x-1)\times\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} 2\times\frac{1}{2}e^{2x}dx = \left[(x-\frac{1}{2})e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x}dx$$

$$= \left[0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] - \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}\right] = 1 - \frac{e}{2}$$

D'où $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx = 1 - \frac{e}{2}$

0.5 pt **b)**



On sait que Graphiquement, l'intégration sert à mesurer une aire, donc l'aire du domaine plan limité par $(\mathcal{C}_f)$, la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ et les deux droites $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$ est une intégrale. Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x) - x|\, dx \times \left\|\vec{i}\right\| \times \left\|\vec{j}\right\| \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - x)dx \times (2cm)^2 \end{aligned}$$

$$\left(car\ d'aprs\ la\ figure\ f(x) \geq x; \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 4\int_0^{\frac{1}{2}} \left((2x-1)e^{2x} + 1\right) dx \quad cm^2 \\ &= 4\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx + 4\int_0^{\frac{1}{2}} 1dx \quad cm^2\end{aligned}$$

D'après la question $6 - a)$, on a $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx = 1 - \frac{e}{2}$, donc

$$\mathcal{A} = 4\left(1-\frac{e}{2}\right)+4\left[x\right]_0^{\frac{1}{2}} \quad cm^2$$

$$= 4-2e+4\left(\frac{1}{2}-0\right) \quad cm^2$$

$D'o \quad \mathcal{A} = (6-2e)\ cm^2$