ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : RATTRAPAGE 2010

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les points $A(0,-2,0)$, $B(1,1,-4)$ et $C(0,1,-4)$ et la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$

0.5 pt **1 -** Montrons que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,2,3)$ et son rayon est $R=5$.

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0 &\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+2^2+z^2-6z+3^2-1-4-9-11=0\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-25=0\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5^2 \end{aligned}$$

Donc le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,2,3)$ et son rayon est $R=5$.

1 pt **2 - a)**

- Montrons que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{j}+3\vec{k}$

  Comme $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$ et $\overrightarrow{AC}(x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A)$

  c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}(1-0,1-(-2),-4-0)$ et $\overrightarrow{AC}(0-0,1-(-2),-4-0)$

  Donc $\overrightarrow{AB}(1,3,-4)$ et $\overrightarrow{AC}(0,3,-4)$

  Alors $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}&=\begin{vmatrix}3&3\\-4&-4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&0\\-4&-4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&0\\3&3\end{vmatrix}\vec{k}\\&=(3\times(-4)-3\times(-4))\vec{i}-(1\times(-4)-0\times(-4))\vec{j}+(1\times3-3\times0)\vec{k}\\&=0\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}\end{aligned}$$

  D'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{j}+3\vec{k}$

  $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{j}+3\vec{k}$

- Déduisons que $4y+3z+8=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

  On sait que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normale à le plan (ABC).

Donc $(ABC) : \ 4y + 3z + d = 0$

puisque le point $A \in (ABC)$, donc $4y_A + 3z_A + d = 0$; c'est-à-dire $d = -4y_A - 3z_A$

Alors $d = -4 \times (-2) - 3 \times 0 = 8$

D'où $4y + 3z + 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

.

0.5 pt **b)** • Calculons $d(\Omega, (ABC))$

On a $d(\Omega, (ABC)) = \dfrac{4y_\Omega + 3z_\Omega + 8}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{4 \times 2 + 3 \times 2 + 8}{\sqrt{25}} = \dfrac{25}{5}$

Donc $d(\Omega, (ABC)) = 5$

D'où $d(\Omega, (ABC)) = 5$

• Déduisons que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

comme $d(\Omega, (ABC)) = 5 = R$

Donc le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

3 - Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

0.5 pt **a)** Démontrons que $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de (Δ).

Comme la droite (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC), alors

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur à la droite (Δ), et puisque on a $\Omega \in (\Delta)$

Alors $\overrightarrow{\Omega M} = t.\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; avec $(t \in \mathbb{R})$ *et* $M(x, y, z) \in (\Delta)$

Donc $\begin{cases} x - x_\Omega = 0t \\ y - y_\Omega = 4t \\ z - z_\Omega = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2 = 4t \\ z - 3 = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

D'où $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

0.25 pt **b)** Démontrons que le triple des coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (ABC) est $(1, -2, 0)$

Comme $4y_H + 3z_H + 8 = 4 \times (-2) + 3 \times 0 + 8 = -8 + 8 = 0$, alors $H(1, -2, 0) \in (ABC)$

Pour $t=-1$, on trouve que $\begin{cases} x=1 \\ y=2-4=-2 \\ z=3-3=0 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$; c'est-à-dire $H(1,-2,0)\in(\Delta)$

Donc $H(1,-2,0)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (ABC).

0.25 pt **c)** Vérifions que H est le point de contact du plan (ABC) et la sphère (S).

$$\begin{aligned} On\ a \quad \Omega H &= \sqrt{(x_H-x\Omega)^2+(y_H-y_\Omega)^2+(z_H-z_\Omega)^2} \\ &= \sqrt{(1-1)^2+((-2)-2)^2+(0-3)^2} \\ &= \sqrt{25} \\ Donc \quad \Omega H &= R \end{aligned}$$

Alors $\Omega\in(S)$, et puisque $H\in(ABC)$ et que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

D'où H est le point de contact du plan (ABC) et la sphère (S).

Exercice 2 : (3 pts)

1 pt **1 -** Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

Comme le discriminant de l'équation est $\Delta=\left(-8\sqrt{3}\right)^2-4\times64=-64<0$

Donc $z_1=\dfrac{8\sqrt{3}-i\sqrt{64}}{2}=4\sqrt{3}-4$ et $z_2=\overline{z_1}=4\sqrt{3}+4i$

D'où l'ensemble des solution de l'équation est $S=\{4\sqrt{3}-4i,4\sqrt{3}+4i\}$

2 - On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives : $a=8i$, $b=4\sqrt{3}-4i$ et $c=2\left(4\sqrt{3}+4i\right)$. Soient z l'affixe du point M et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'ongle $\dfrac{4\pi}{3}$.

0.5 pt **a)** Montrons que $z'=\left(-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

On sait que $R(M)=M' \Leftrightarrow z'=\omega+e^{i\theta}(z-\omega)$, avec $\theta=\dfrac{4\pi}{3}$ et $\omega=0$

$$\textit{Donc} \qquad z' = e^{i\frac{4\pi}{3}} z$$

$$= \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) z$$

$$= \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) z$$

$$= \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) z$$

$$\textit{Alors} \qquad z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$$

D'où $z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$

0.25 pt **b)** Vérifions que le point B est l'image du point A par la rotation R.

Soit le point A' d'affixe a' l'image du point A par la rotation R, on a donc

$$a' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) a = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) 8i = -\frac{8}{2}i - i^2\frac{8\sqrt{3}}{2}$$

$$= -4i + 4\sqrt{3}$$

$$= 4\sqrt{3} - 4i$$

Donc $a' = b$

Alors les points A' et B sont confondus.

D'où le point B est l'image du point A par la rotation R.

0.75 pt **c)** • Montrons que $\frac{a-b}{c-b} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{a-b}{c-b}=\frac{8i-(4\sqrt{3}-4i)}{2(4\sqrt{3}+4i)-(4\sqrt{3}-4i)}=\frac{-4\sqrt{3}+12i}{4\sqrt{3}+12i}=\frac{-\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}+3i}$$

$$=\frac{-(\sqrt{3}-3i)^2}{(\sqrt{3}+3i)(\sqrt{3}-3i)}$$

$$=\frac{-(3-6i\sqrt{3}-9)}{3+9}$$

$$=\frac{6+6i\sqrt{3}}{12}$$

Donc $\quad \frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

D'où $\quad \frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

- Écrivons le nombre $\frac{a-b}{c-b}$ sous forme trigonométrique.

$$\frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

d) Déduisons que le triangle ABC est équilatéral.

Comme $\quad \frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Donc $\quad \left|\frac{a-b}{c-b}\right|=1$; c'est-à-dire $\quad |a-b|=|c-b|$, alors $\quad AB=BC \qquad (1)$

Et puisque $\quad (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})\equiv arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right)\ [2\pi]$, donc $\quad (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \qquad (2)$

D'après (1) et (2) le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient huit boules portées les nombres suivants : $1-1-1-2-2-2-3-3$

(les boules sont indiscernables au toucher)

On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1 - Soient A et B deux événement tels que

A : " tirer deux boules portant le nombre 2"

B : "tirer deux boules dont une au moins porte le nombre 3 "

1.25 pt

a) • Montrons que $\quad P(A)=\frac{3}{28}$

Soit Ω l'univers, et comme le tirage est successive et sans remise, donc

$$Card(\Omega)=A_8^2=8\times 7=56$$

Et puisque les boules sont indiscernables au toucher, donc $P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

Pour obtenir deux boules portant le nombre 2, on a $Card(A) = A_3^2 = 3 \times 2 = 6$

D'où $P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \dfrac{6}{56} = \dfrac{3}{28}$

- Montrons que $P(B) = \dfrac{13}{28}$

Pour obtenir au moins une boule porte le nombre 3 ; c'est à dire

- soit obtenir la première boule porte 3 et la deuxième est contre 3, donc il y a $A_2^1 \times A_6^1$ possibilités.

- soit obtenir la deuxième boule porte 3 et la première est contre 3, donc il y a $A_6^1 \times A_2^1$ possibilités.

- soit obtenir les deux boules portant le nombre 3, donc il y a A_2^2 possibilités.

Donc $Card(B) = A_2^1 \times A_6^1 + A_6^1 \times A_2^1 + A_2^2 = 2A_2^1 \times A_6^1 + A_2^2 = 26$

D'où $P(B) = \dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{26}{56} = \dfrac{13}{28}$

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules portant un nombre impair.

0.25 pt **a)** Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

Les boule tirées	La valeur de X
Il n'y a pas de boule porte un nombre impair	$X = 0$
Il y a une boule porte un nombre impair	$X = 1$
Les deux boules portant un nombre impair	$X = 2$

1 pt **b)** Montrons que $P(X = 1) = \dfrac{15}{28}$.

On a $Card(X = 1) = 2A_3^1 \times A_5^1 = 30$ (puisque on a 5 boules portant un nombre impair)

Donc $P(X = 1) = \dfrac{Card((X = 1)}{Card(\Omega)} = \dfrac{30}{56} = \dfrac{15}{28}$

0.75 pt **c)** Donnons la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

- $(X = 0)$ signifier de tirer deux boules portant le nombre 2.

Donc $P(X = 0) = P(A) = \dfrac{3}{28}$

- D'après la question précédente $P(X = 1) = \dfrac{15}{28}$
- On a $Card(X = 2) = A_5^2 = 20$

Donc $P(X = 2) = \dfrac{card((X = 2)}{card(\Omega)} = \dfrac{20}{56} = \dfrac{5}{14}$

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{14}$

Exercice 4 : (3 pts)

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{21+u_n} \end{cases}$

0.5 pt **1 -** Montrons que $u_n > 0$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $1 > 0$, donc $u_0 > 0$, alors la proposition est vraie pour $n = 0$

Supposons que $u_n > 0$ pour n fixé de $\mathbb{N}$, et montrons que $u_{n+1} > 0$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $u_n > 0$, donc $3u_n > 0$ et $21 + u_n > 0$

Alors $\dfrac{3u_n}{21+u_n} > 0$, d'où $u_{n+1} > 0$

D'après le raisonnement de récurrence, on a $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **2 -** Montrons que $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

Soit $(n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - \frac{1}{7}u_n = \dfrac{3u_n}{21+u_n} - \frac{1}{7}u_n = \dfrac{21u_n}{7(21+u_n)} - \dfrac{u_n(21+u_n)}{7(21+u_n)} = \dfrac{21u_n - 21u_n - (u_n)^2}{7(21+u_n)}$

$= -\dfrac{(u_n)^2}{7(21+u_n)}$

On sait que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 0$, donc $-\dfrac{(u_n)^2}{7(21+u_n)} < 0$; c'est-à-dire $u_{n+1} - \frac{1}{7}u_n < 0$

D'où $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **3 -**

- Montrons que la suite (u_n) est décroissante.

  Comme $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 0$, donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{1}{7}u_n < u_n$ et puisque $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$

  Alors $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} < u_n$

  D'où la suite (u_n) est décroissante.

- Déduisons que la suite (u_n) est convergente.

  Comme la suite (u_n) est minorée par 0 et aussi décroissante.

  Alors la suite (u_n) est convergente.

0.75 pt **4 - a)** Montrons par récurrence que $u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Pour $n=1$, on a $u_1 = \dfrac{3u_0}{21+u_0} = \dfrac{3}{22}$

et comme $\left(\dfrac{1}{7}\right)^1 = \dfrac{1}{7}$, c'est-à-dire $u_1 < \left(\dfrac{1}{7}\right)^1$, donc la proposition est vraie pour $n=1$

Supposons que $u_n < \left(\dfrac{1}{7}\right)^n$ pour n fixé de $\mathbb{N}$, et montrons que $u_{n+1} < \left(\dfrac{1}{7}\right)^{n+1}$

D'après la question 2), on a $u_{n+1} < \dfrac{1}{7}u_n$ et comme $u_n < \left(\dfrac{1}{7}\right)^n$

Donc $u_{n+1} < \dfrac{1}{7}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$ (car $u_n > 0$), d'où $u_{n+1} < \left(\dfrac{1}{7}\right)^{n+1}$

D'après le raisonnement par récurrence $u_n < \left(\dfrac{1}{7}\right)^n$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$

0.5 pt **b)** Déterminons la limite de la suite (u_n).

Comme $0 < u_n < \left(\dfrac{1}{7}\right)^n$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$

et $\lim \left(\dfrac{1}{7}\right)^n = 0$ $\left(\text{car } 0 < \dfrac{1}{7} < 0\right)$

Donc $\lim u_n = 0$

Problème : (8 pts)

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3$.

0.25 pt **1 - a)** Vérifions que $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2+3x+2)$, pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$

Soit $x \in]0,+\infty[$; $(x-1)(3x^2+3x+2) = 3x^3+3x^2+2x-3x^2-3x-2$

$= 3x^3 - x - 2$

Donc $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2+3x+2)$, pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$

0.5 pt **b)** Montrons que $g'(x) = \dfrac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$, pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$.

On sait que g est dérivable sur $]0,+\infty[$; comme la somme des fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$, et on a $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $g'(x) = 3x^2 - 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{3x^3-x-2}{x}$

D'après la question précédente, on a $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2+3x+2)$

Donc $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $g'(x) = \dfrac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

0.25 pt **2 - a)** Vérifions que $\dfrac{3x^2+3x+2}{x} > 0$, pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$.

D'abord, résolvons l'équation (E) : $3x^2+3x+2=0$

Le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = 3^2 - 4\times 3\times 2 = -15 < 0$

Donc $3x^2+3x+2 > 0$, pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$, et puisque $x > 0$

Alors $\dfrac{3x^2+3x+2}{x} > 0$, pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$

0.5 pt **b)** Déduisons que le signe de $g'(x)$ est celui de $x-1$ sur $]0,+\infty[$.

On a $(\forall x \in]0,+\infty[)\,;\quad g'(x) = \dfrac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$ et $\dfrac{3x^2+3x+2}{x} > 0$

Donc le signe de $g'(x)$ est celui de $x-1$ sur $]0,+\infty[$.

0.5 pt **3 - a)** Montrons que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$ et croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

Si $x \in]0,1]$, alors $0 < x \leq 1$, donc $x-1 \leq 0$; par suite $g'(x) \leq 0$

Donc la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$

Si $x \in [1,+\infty[$, alors $x \geq 1$, donc $x-1 \geq 0$; par suite $g'(x) \geq 0$

Donc la fonction g est croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$

0.5 pt **b)** Déduisons que $g(x) > 0$, pour tout x de $]0,+\infty[$ (remarquer que $g(1) > 0$)

On a la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$ et croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$. Donc g admet une valeur minimale absolue en 1.

Alors $(\forall x \in]0,+\infty[)\,;\quad g(x) \geq g(1)$, et puisque $g(1) > 0$

D'où $(\forall x \in]0,+\infty[)\,;\quad g(x) > 0$

Partie II

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x - 1 + \dfrac{x-1+\ln x}{x^2}$, et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (On prendra $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 1cm$)

1 pt **1 -** • Montrons que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$, pour tout x de $]0,+\infty[$

On sait que f est dérivable sur $]0,+\infty[$, alors $(\forall x \in]0,+\infty[)\,;$

$$f'(x) = 1 + \frac{(1+\frac{1}{x})x^2 - 2x(x-1+ln(x))}{x^4} = 1 + \frac{(x+1)x - 2x(x-1+ln(x))}{x^4}$$
$$= 1 + \frac{x+1-2x+2-2ln(x))}{x^3}$$
$$= \frac{x^3 - x + 3 - 2ln(x)}{x^3}$$

Donc $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$

• Déduisons que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

On a $(\forall x \in]0,+\infty[)\,;\quad x^3 > 0$ et $g(x) > 0$ (d'après la question $3-a$) dans la partie I)

Donc $(\forall x \in]0,+\infty[)\,;\quad f'(x) > 0$

Alors la fonction f est croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$

0.5 pt **2 - a)** Montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x-1 = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x-1+ln(x)}{x^2} = -\infty$, par suite $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$

D'où (C) admet une asymptote verticale à droite d'équation $x = 0$.

0.75 pt **b)**

- Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1+ln(x)}{x^2} = 0$ (On rappel que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x)}{x^2} = 0$)

  On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1+ln(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{ln(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{ln(x)}{x^2} = 0$

  car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0\,;\quad \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x)}{x^2} = 0$

  Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1+ln(x)}{x^2} = 0$

- Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

  Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1+ln(x)}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$

  Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1+\dfrac{x-1+ln(x)}{x^2} = +\infty$

  Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

0.5 pt **c)** Montrons que la droite (Δ) d'équation $y = x-1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1+ln(x)}{x^2} = 0$

Alors la droite (Δ) : $y = x-1$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

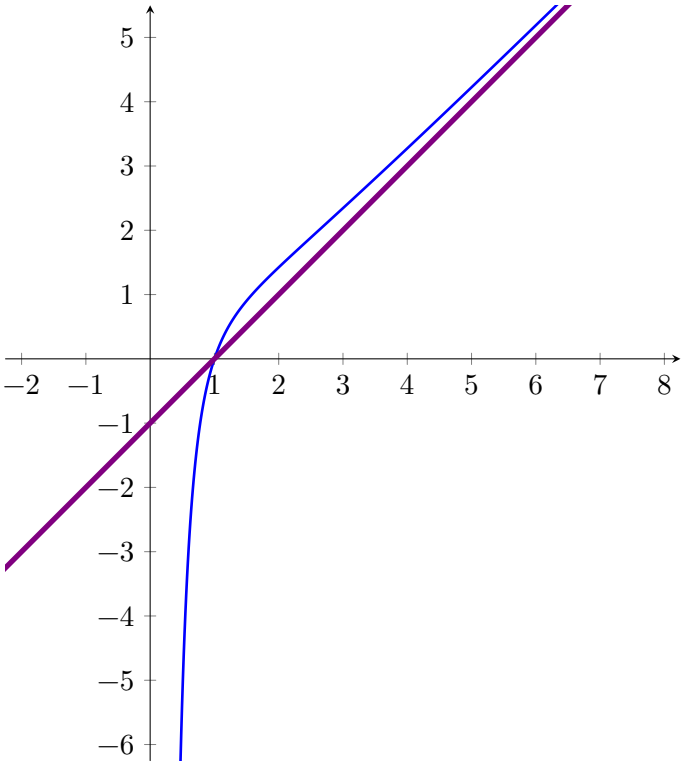
3 - Montrons que (T) : $y = 3(x-1)$ est une équation de la droite tangente à la courbe (C) au point de coordonnées $(1,0)$. **0.5 pt**

On sait que f est dérivable en 1, et on a $f'(1) = \dfrac{g(1)}{1^3} = 3$

Donc (T) : $y = f'(1)(x-1)+f(1)$, et comme $f(1) = 1-1+\frac{1-1+\ln(1)}{1^2} = 0$

Alors $y = 3(x-1)$ est une équation de la droite tangente à (C) au point de coordonnées $(1,0)$.

0.75 pt **4 -** Construisons la droite (Δ) et la courbe (C) (on admettra que la courbe (C) possède un point d'inflexion unique dont on ne demande pas de déterminer)



1 pt **5 - a)** En utilisant l'intégration par partie, montrons que $\int_1^e \frac{ln(x)}{x^2}\,dx = 1 - \frac{2}{e}$

On pose $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x^2} \\ v(x) = lnx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = -\frac{1}{x} \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

Donc $\int_1^e \frac{ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{ln(x)}{x}\right]_1^e - \int_1^e \frac{-1}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^e = \frac{-ln(e)}{e} - \frac{1}{e} + \frac{ln(1)}{1} + \frac{1}{1}$

$= 1 - \frac{2}{e}$

D'où $\int_1^e \frac{ln(x)}{x^2}\,dx = 1 - \frac{2}{e}$

b) Montrons que $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , la droite (Δ) et les

0.5 pt deux droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ est égale à $\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) cm^2$.

On sait que $\mathcal{A} = \int_1^e |f(x) - (x-1)|\mathrm{d}x \times u.s.m$

Et puisque $f(x) - (x-1) = \frac{x - 1 + \ln(x)}{x^2}$, alors

si $1 \leq x \leq e \Rightarrow (0 \leq x - 1 \leq e - 1$ et $0 \leq \ln(x) \leq 1)$

Donc $(\forall x \in [1, e])$; $f(x) - (x-1) \geq 0$, alors $(\forall x \in [1, e])$; $|f(x) - (x-1)| =$

$\frac{x-1+\ln(x)}{x^2}$, par suite

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_1^e |f(x)-x+1|\mathrm{d}x \times u.s.m \\
&= \int_1^e \left(\frac{x-1+\ln(x)}{x^2}\right)\mathrm{d}x \times 1^2 cm^2 \\
&= \int_1^e \left(\frac{x-1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right)\mathrm{d}x.cm^2 \\
&= \int_1^e \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(x)}{x^2}\right)\mathrm{d}x.cm^2 \\
&= \left(\left[\ln(x)+\frac{1}{x}\right]_1^e+1-\frac{2}{e}\right)cm^2 \\
&= \left(ln(e)+\frac{1}{e}-\ln(1)-\frac{1}{1}+1-\frac{2}{e}\right)cm^2
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A} = \left(1-\frac{1}{e}\right)cm^2$

D'où $\mathcal{A} = \left(1-\frac{1}{e}\right)cm^2$