Exercice 1 — Session : NORMAL 2010 — 3 Pts

On considère, dans le l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, les points $A(-1,0,3)$, $B(3,0,0)$ et $C(7,1,-3)$ et la sphère (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$

1 pt **1 -** Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{i}+4\vec{k}$ et en déduire que $3x+4z-9=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0.5 pt **2 -** Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(3,1,0)$ et que son rayon est 5

3 - Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC)

0.5 pt **a)** Démontrer que : $\begin{cases} x = 3+3t \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de (Δ)

1 pt **b)** Démontrer que la droite (Δ) coupe la sphère (S) aux points $E(6,1,4)$ et $F(0,1,-4)$

Exercice 2 — Session : NORMAL 2010 — 3 Pts

1 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-6z+10=0$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, les points A, B et C d'affixes respectives : $a=3-i$, $b=3+i$ et $c=7-3i$

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

0.5 pt **a)** Montrer que : $z' = iz+2-4i$

0.25 pt **b)** Vérifier que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est $c'=5+3i$

1.25 pt **c)** Montrer que : $\frac{c'-b}{c-b} = \frac{1}{2}i$ puis en déduire que le triangle BCC' est rectangle en B et que $BC = 2BC'$

Exercice 3 — Session : NORMAL 2010 — 3 Pts

Une urne contient ***dix* boules**, *cinq* boules blanches, *trois* boules rouges et *deux* boules noires (**les boules sont indiscernables au toucher**)

On tire, au hasard, et simultanément, *quatre* boules de l'urne

1 - On considère les deux événement :

A : " **tirer une seule boule rouge** " B : " **tirer au moins une boule blanche** "

1 pt Montrer que : $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{41}{42}$

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges tirées

0.25 pt **a)** Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0 et 1 et 2 et 3

1 pt **b)** Montrer que $P(X = 2) = \frac{3}{10}$ et $P(X = 0) = \frac{1}{6}$

0.75 pt **c)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

Exercice 4 — Session : NORMAL 2010 — 3 Pts

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{2u_n} \end{cases}$$

0.75 pt **1 -** Montrer, par récurrence, que : $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

2 - On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 pt **a)** Montrer que : (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et en déduire que $v_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.75 pt **b)** Montrer que : $u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$ et en déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

0.5 pt **3 -** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ sachant que (w_n) est la suite numérique définie par : $w_n = \ln(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Exercice 5 — Session : NORMAL 2010 — 8 Pts

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

0.5 pt **1 -** Montrer que : $g'(x) = 4(2x + 1)e^{2x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0.5 pt **2 -** Montrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$

0.5 pt **3 - a)** Montrer que : $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$ puis vérifier que $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

0.25 pt **b)** Déduire que : $g(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

Partie II

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{2x} + x + 1$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, $\left(\left\|\vec{\imath}\right\| = \left\|\vec{\jmath}\right\| = 2cm \right)$

1 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\left(\textbf{On rappelle que :} \lim\limits_{u\to-\infty} u\mathrm{e}^{u} = 0\right)$

0.75 pt **2 -** Montrer que : $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$, puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

0.75 pt **3 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction asymptotique celle de l'axe des ordonnées

0.5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x+1)]$ et en déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

0.5 pt **c)** Déterminer le couple de coordonnées du point d'intersection de la droite (Δ) et la courbe (C) puis montrer que la courbe (C) est en-dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ et qu'elle est au-dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

0.25 pt **4 - a)** Montrer que $y = x$ est une équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O

0.25 pt **b)** Montrer que la courbe (C) possède un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$

$\left(\textbf{la détermination de l'ordonnée du point d'inflexion n'est pas demandée}\right)$

0.75 pt **5 -** Construire, dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les deux droites (Δ) et (T) et la courbe (C)

1 pt **6 - a)** En utilisant une intégration par partie, montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = 1 - \frac{\mathrm{e}}{2}$

0.5 pt **b)** Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , la droite (T) tangente à la courbe (C), et les deux droites des équations $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$ est : $(6 - 2\mathrm{e})cm^2$

FIN