Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2010 — 3 Pts

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les points $A(0,-2,0)$, $B(1,1,-4)$ et $C(0,1,-4)$ et la sphère (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$.

0.5 pt **1 -** Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,2,3)$ et son rayon est 5.

2 - a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{j}+3\vec{k}$ puis en déduire que $4y+3z+8=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC). — 1 pt

b) Calculer $d(\Omega,(ABC))$ puis en déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S). — 0.5 pt

3 - Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

a) Démontrer que : $\begin{cases} x=1 \\ y=2+4t \\ z=3+3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ). — 0.5 pt

b) Démontrer que le triple des coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (ABC) est $(1,-2,0)$. — 0.25 pt

c) Vérifier que H est le point de contact du plan (ABC) et la sphère (S). — 0.25 pt

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2010 — 3 Pts

1 - Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2-8\sqrt{3}z+64=0$$ — 1 pt

2 - On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives : $a=8i$, $b=4\sqrt{3}-4i$ et $c=2\left(4\sqrt{3}+4i\right)$.

Soient z l'affixe du point M et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{4\pi}{3}$.

a) Montrer que $z'=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$. — 0.5 pt

b) Vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation R. — 0.25 pt

c) Montrer que : $\frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ puis écrire le nombre $\frac{a-b}{c-b}$ sous forme trigonométrique. — 0.75 pt

d) En déduire que le triangle ABC est équilatéral. — 0.5 pt

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2010 — 3 Pts

Une urne contient huit boules qui portent les nombres suivants :

$$①\ ,\ ①\ ,\ ①\ ,\ ②\ ,\ ②\ ,\ ②\ ,\ ③\ ,\ ③$$

(les boules sont indiscernables au toucher)

On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1 - Soient A et B deux événement tels que :

A : " tirer deux boules portant le nombre 2"

B : "tirer deux boules dont une au moins porte le nombre 3 "

1.25 pt Montrer que $P(A) = \dfrac{3}{28}$ et que $P(B) = \dfrac{13}{28}$.

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules portant un nombre impair.

0.25 pt **a)** Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

0.75 pt **b)** Montrer que : $P(X = 1) = \dfrac{15}{28}$.

0.75 pt **c)** Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2010 — 3 Pts

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{21 + u_n} \end{cases}$$

0.5 pt **1 -** Montrer que : $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **2 -** Montrer que : $u_{n+1} < \dfrac{1}{7}u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **3 -** Montrer que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

0.75 pt **4 - a)** Montrer par récurrence que : $u_n < \left(\dfrac{1}{7}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

0.5 pt **b)** Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 5 — Session : RATTRAPAGE 2010 — 8 Pts

I) On considère la fonction numérique g définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3.$$

1 - a) Vérifier que :

0.25 pt $3x^3 - x - 2 = (x - 1)(3x^2 + 3x + 2)$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$

0.5 pt **b)** Montrer que : $g'(x) = \dfrac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$. pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$.

0.25 pt **2 - a)** Vérifier que : $\dfrac{3x^2+3x+2}{x} > 0$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$.

0.5 pt **b)** En déduire que le signe de $g'(x)$ est celui de $x-1$ sur $]0,+\infty[$.

3 - a) Montrer que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$ et croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

0.5 pt

b) En déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$

(remarquer que : $g(1) > 0$).

0.5 pt

II) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (On prendra $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 1cm$)

1 - Montrer que : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$, puis en déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

1 pt

0.5 pt **2 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement.

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1+lnx}{x^2} = 0$ et que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

(On rappel que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{lnx}{x^2} = 0$)

0.75 pt

c) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

0.5 pt

3 - Montrer que $y = 3(x-1)$ est une équation de la droite tangente à la courbe (C) au point de coordonnées $(1,0)$

0.5 pt

4 - Construire la droite (Δ) et la courbe (C) (on admettra que la courbe (C) possède un point d'inflexion unique dont on ne demande pas de déterminer).

0.75 pt

5 - a) En utilisant l'intégration par partie, montrer que

$$\int_1^e \frac{lnx}{x^2}\,dx = 1 - \frac{e}{2} \quad \text{(Poser : } u'(x) = \tfrac{1}{x^2} \text{ et } v(x) = lnx\text{)}.$$

1 pt

b) Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , la droite (Δ) et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est égale à : $\left(1 - \dfrac{1}{e}\right) cm^2$.

0.5 pt

FIN