ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2011

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (2.5 pts)

0.5 pt **1 - a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 36$ l'équation admet deux solutions réels distincts.

$x = \frac{-4+\sqrt{36}}{2\times 1} = 1$ ou $x = \frac{-4-\sqrt{36}}{2\times 1} = -5$

$S = \{-5; 1\}$

1 pt **b)** Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation suivante : $\ln(x^2+5) = \ln(x+2) + \ln 2x$

$\forall \mathbf{x} \in]0, +\infty[$ donc $x > 0$ donc $x^2 + 1 > 0$ et $x + 2 > 0$ et $2x > 0$

$\ln(x^2+5) = \ln(x+2) + \ln 2x \Leftrightarrow \ln(x^2+5) = \ln[(x+2)2x]$

$\Leftrightarrow x^2 + 5 = (x+2)2x$

$\Leftrightarrow x^2 + 5 = 2x^2 + 4x$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$

Donc $x = -5$ ou $x = 1$, or $x > 0$ donc $x = 1$

D'où $S = \{1\}$

1 pt **2 -** Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'inéquation suivante : $\ln x + \ln(x+1) \geq \ln(x^2+1)$

$\forall x \in]0, +\infty[$ donc $x > 0$ donc $x^2 + 1 > 0$ et $x + 1 > 0$

$\ln x + \ln(x+1) \geq \ln(x^2+1) \Leftrightarrow \ln[x(x+1)] \geq \ln(x^2+1)$

$\Leftrightarrow x(x+1) \geq x^2 + 1$

$\Leftrightarrow x \geq 1$

Or $x > 0$. D'où $S = [1, +\infty[$

Exercice 2 : (3 pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$U_{n+1} = \frac{U_n}{5+8U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad$ et $\quad U_0 = 1$

0.5 pt **1 -** Montrer que : $U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$ on a $\quad U_0 = 1$ donc $U_0 > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n > 0$ et montrons que $U_{n+1} > 0$

On a $U_n > 0$ donc $8U_n > 0$ et $5 + 8U_n > 5$ donc $U_{n+1} = \frac{U_n}{5+8U_n} > 0$

D'après le principe de démonstration par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad U_n > 0$

2 - On considère la suite (V_n) définie par : $V_n = \frac{1}{U_n} + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 5 puis exprimer V_n en fonction de n. **1.5 pt**

Montrons que $V_{n+1} = 5V_n$.

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} + 2 = \frac{1}{\frac{U_n}{5+8U_n}} + 2 = \frac{5+8U_n}{U_n} + 2$$

$$= \frac{5}{U_n} + \frac{8U_n}{U_n} + 2 = \frac{5}{U_n} + 8 + 2 = 5\left(\frac{1}{U_n} + 2\right)$$

D'où $V_{n+1} = 5V_n$

Alors (V_n) est une suite géométrique de raison 5 de premier terme $V_0 = \frac{1}{U_0} + 2 = 3$.

En suite : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad V_n = V_0 \times 5^n = 3 \times 5^n$

1 pt **b)** Montrer que $U_n = \frac{1}{3\times 5^n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

$$V_n = \frac{1}{U_n} + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{U_n} = V_n - 2$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{1}{V_n - 2}$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2}$$

D'où $U_n = \frac{1}{3\times 5^n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3\times 5^n - 2} = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$ et $5 > 1$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

Exercice 3 : (5 pts)

1 pt **1 -** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 - 18Z + 82 = 0$

$\Delta = (-18)^2 - 4 \times 1 \times 82 = -4 = (2i)^2$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \frac{18+2i}{2} = 9 + i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 9 - i$

D'où $S = \{9 - i; 9 + i\}$

2 - Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 9+i$, $b = 9-i$, $c = 11-i$

1 pt **a)** Montrer que : $\frac{c-b}{a-b} = -i$ puis en déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

$\frac{c-b}{a-b} = \frac{11-i-9+i}{9+i-9+i} = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = -i$

D'où $\frac{c-b}{a-b} = -i$

On a $\frac{c-b}{a-b} = -i$ donc

$\left|\frac{c-b}{a-b}\right| = |-i| \Leftrightarrow \frac{|c-b|}{|a-b|} = 1 \Leftrightarrow \frac{BC}{BA} = 1$

Donc $BC = BA$

$\frac{c-b}{a-b} = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Donc $\frac{c-b}{a-b} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Or $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) \equiv \arg\frac{c-b}{a-b}[2\pi]$

Donc $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $BC = BA$

D'où le triangle ABC est isocèle et rectangle en B

0.5 pt **b)** Écrire $4(1-i)$ sous forme trigonométrique.

$|4(1-i)| = 4|1-i| = 4\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}4(1-i) &= 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ &= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\end{aligned}$$

D'où $4(1-i) = \left[4\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]$

1 pt **c)** Montrer que : $(c-a)(c-b) = 4(1-i)$ puis en déduire que $AC \times BC = 4\sqrt{2}$

$(c-a)(c-b) = (11-i-9-i)(11-i-9+i) = (2-2i)2 = 4(1-i)$

D'où $(c-a)(c-b) = 4(1-i)$

$|(c-a)(c-b)| = |4(1-i)| \Leftrightarrow |(c-a)||(c-b)| = 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |(c-a)||(c-b)| = 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow AC \times BC = 4\sqrt{2}$

D'où $AC \times BC = 4\sqrt{2}$

1.5 pt **d)** Soit z l'affixe de point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation de centre B et d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

Montrer que : $z' = -iz + 10 + 8i$ puis vérifier que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est $9-3i$.

$R(M) = M' \Leftrightarrow z' - b = e^{i\frac{3\pi}{2}}(z-b)$

$\Leftrightarrow z' - b = (\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2}))(z-b)$

$\Leftrightarrow z' = -i(z-9+i) + 9 - i$

$\Leftrightarrow z' = -iz + 9i + 1 + 9 - i$

D'où $z' = -iz + 10 + 8i$

Vérifier que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est $9-3i$

$R(C) = C' \Leftrightarrow c' = -ic + 10 + 8i$

$\Leftrightarrow c' = -i(11-i) + 10 + 8i$

$\Leftrightarrow c' = -11i - 1 + 10 + 8i = 9 - 3i$

D'où $c' = 9 - 3i$

Exercice 4 : (10 pts)

Partie I

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1-x)e^x - 1$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que $g'(x) = -xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$g'(x) = (1-x)'e^x + (1-x)(e^x)'$

$= -e^x + (1-x)e^x$

$= e^x(-1+1-x)$

D'où $g'(x) = -xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

0.75 pt **b)** Montrer que g est décroissante sur $[0, +\infty[$ et croissante sur $]-\infty; 0]$ puis vérifier que $g(0) = 0$

On a $g'(x) = -xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ alors le signe de $g'(x)$ est celui de $-x$ car $\quad e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Pour $x \in [0, +\infty[$ on a $-x \leq 0$ alors $g'(x) \leq 0$

Donc g est décroissante sur $[0, +\infty[$

Pour $x \in]-\infty; 0]$ on a $-x \geq 0$ alors $g'(x) \geq 0$

Donc g est croissante sur $]-\infty; 0]$

Vérifier que $g(0) = 0$

On a $g(0) = (1-0)e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

0.5 pt **2 -** En déduire que $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

On a g est continue sur $\mathbb{R}$

Puisque g est décroissante sur $[0, +\infty[$ et croissante sur $]-\infty; 0]$ donc $g(0)$ est le maximum de g sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire $g(x) \leq g(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ or $g(0) = 0$

D'où $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Partie II

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2-x)e^x - x$ et (C) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 1 cm)

0.5 pt **1 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2-x)e^x - x$$
$$= -\infty$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis en déduire que (C) admet au voisinage de $+\infty$ une **0.75 pt** branche parabolique de direction à déterminer.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2-x)e^x - x}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(2-x)e^x}{x} - \frac{x}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (2-x)\frac{e^x}{x} - 1$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (2-x)\frac{e^x}{x} - 1$$
$$= -\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Alors (C) admet une branche parabolique au direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

0.75 pt **2 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + x$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2-x)e^x - x$$
$$= \lim_{x\to-\infty} 2e^x - xe^x - x$$
$$= +\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} 2e^x - xe^x - x + x$$
$$= \lim_{x\to-\infty} 2e^x - xe^x$$
$$= 0$$

Car $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

0.25 pt **b)** Montrer que la droite $(D) : y = -x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (-x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + x = 0$

D'où la droite $(D) : y = -x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$

0.5 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = (2-x)e^x - x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2-x)'e^x + (2-x)\left(e^x\right)' - 1 \\ &= -e^x + (2-x)e^x - 1 \\ &= e^x(-1+2-x) - 1 \\ &= e^x(1-x) - 1 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

0.25 pt **b)** Interpréter géométriquement le résultat $f'(0) = 0$

On a $f'(0) = g(0) = 0$ donc (C) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0

0.5 pt **c)** Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau des variations de la fonction f

On a $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ Donc $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D'où f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

0.5 pt **4 -** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ (on admettra que $e^{\frac{3}{2}} > 3$).

On a la fonction f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, de plus $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc $0 \in f(\mathbb{R})$.

D'après le théorème de la bijection réciproque l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Or } f(\frac{3}{2}) \times f(2) &= [(2-\frac{3}{2})e^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}] \times [(2-2)e^2 - 2] \\ &= (-2)(\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}) \\ &= -e^{\frac{3}{2}} + 3 < 0 \end{aligned}$$

Donc $\frac{3}{2} < \alpha < 2$

0.5 pt **5 - a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) + x = 0$ et en déduire que (C) et (D) se coupent au point $A(2;-2)$.

$$\begin{aligned} f(x) + x = 0 &\iff (2-x)e^x - x + x = 0 \\ &\iff (2-x)e^x = 0 \\ &\iff 2 - x = 0 \\ &\iff x = 2 \end{aligned}$$

Donc (C) et (D) se coupe au point $A(2; f(2))$, or $f(2) = -2$ donc $A(2;-2)$

0.25 pt **b)** Étudier le signe de $f(x)+x$ sur $\mathbb{R}$.

On a $f(x)+x=(2-x)e^x$, or $e^x>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, alors le signe de $f(x)+x$ est celui de $2-x$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)+x$		$+$	0	$-$	

0.25 pt **c)** En déduire que (C) est au-dessus de (D) sur $]-\infty;2[$ et en-dessous de (D) sur $]2;+\infty[$.

On a $\forall x\in]-\infty;2[$: $\quad f(x)+x>0$, alors (C) est au-dessus de (D) sur l'intervalle $]-\infty;2[$ et on a $\forall x\in]2;+\infty[$: $\quad f(x)+x<0$, alors (C) est en-dessous de (D) sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

0.5 pt **6 - a)** Montrer que (C) possède un seul point d'inflexion de coordonnées $(0;2)$

On a $f'(x)=g(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc $f''(x)=g'(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

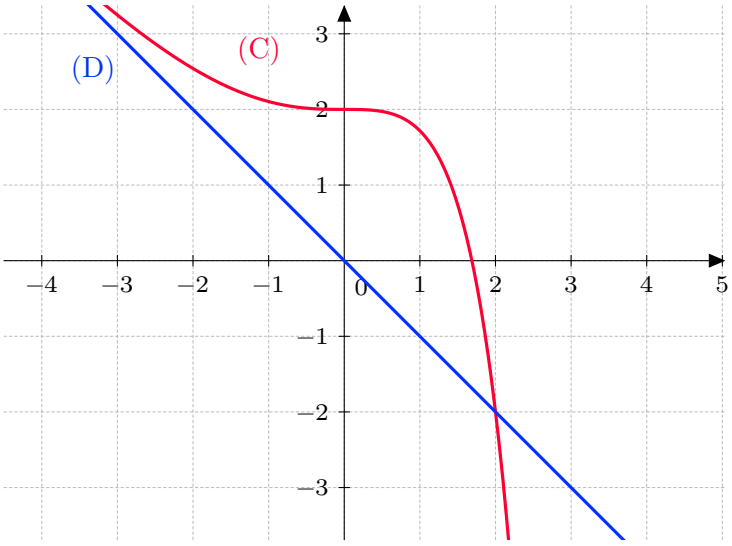
$f''(x)=0\Leftrightarrow x=0$

$f''(x)\geq 0 \quad \forall x\in]-\infty;0]$ et $f''(x)\leq 0 \quad \forall x\in[0;+\infty[$

Donc (C) possède un seul point d'inflexion d'abscisse 0 et $f(0)=2$

D'où (C) possède un seul point d'inflexion de coordonnées $(0;2)$

1 pt **b)** Construire la droite (D) et la courbe (C) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.



1 pt **7 - a)** Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx=3-\frac{4}{e}$.

Calculons $\int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx$

Posons $u(x)=2-x$ donc $u'(x)=-1$

$v'(x)=e^x$ donc $v(x)=e^x$

$$\int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx = [(2-x)e^x]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -e^x dx$$
$$= 2 - 3e^{-1} + [e^x]_{-1}^{0}$$
$$= 2 - \frac{3}{e} + 1 - \frac{1}{e}$$

D'où $\int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx = 3 - \frac{4}{e}$

b) En déduire, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$. **0.25 pt**

On sait que la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $[-1; 0]$

$$A = \int_{1}^{e} f(x) - (-x)dx \times 1cm \times 1cm$$
$$= \int_{1}^{e} (f(x) + x)\, dx \quad cm^2$$
$$= \int_{1}^{e} (2-x)e^x dx \quad cm^2$$
$$= \left(3 - \frac{4}{e}\right) \quad cm^2$$

D'où $A = \left(3 - \frac{4}{e}\right) \quad cm^2$

FIN