ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences et Technologies

Session : RATTRAPAGE 2011

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (2,5 pts)

1 - a) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2 - 2x - 3 = 0$

On a $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$

Comme $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions distincts.

$x_1 = \dfrac{2 + \sqrt{16}}{2} = \dfrac{2+4}{2} = 3$

Et $x_2 = \dfrac{2 - \sqrt{16}}{2} = \dfrac{2-4}{2} = -1$

Donc : $S = \{-1; 3\}$

b) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $e^x - \dfrac{3}{e^x} - 2 = 0$

$$\text{On a : } e^x - \frac{3}{e^x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{(e^x)^2 - 2e^x - 3}{e^x} = 0$$
$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x - 3 = 0$$

On pose $t = e^x$

Donc $e^x - \dfrac{3}{e^x} - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$

Alors , d'après 1-a , on a $t = 3$ ou $t = -1$

Donc $e^x = 3$ ou $e^x = -1$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ alors $e^x = 3$

Donc $x = ln3$

Donc : $S = \{ln3\}$

2 - Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $e^{x-1} - e^{-x} \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{On a : } e^{x-1} - e^{-x} \geq 0 &\Leftrightarrow e^{x-1} \geq e^{-x} \\ &\Leftrightarrow x + 1 \geq -x \\ &\Leftrightarrow 2x \geq -1 \\ &\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

D'où : $S = [-\frac{1}{2}, +\infty[$

Exercice 2 : (4 pts)

0.75 pt **1 -** Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes C, l'équation : $z^2 - 6z + 18 = 0$

On a $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 18 = 36 - 72 = -36$

Comme $\Delta < 0$ alors $z_1 = \dfrac{-(-6) - i\sqrt{-(-36)}}{2} = \dfrac{6 - i\sqrt{36}}{2} = 3 - 3i$

Et $z_2 = \bar{z_1} = 3 + 3i$

Donc : $S = \{3 - 3i; 3 + 3i\}$

2 - On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A et B d'affixes respectives a et b tels que : $a = 3 + 3i$ et $b = 3 - 3i$.

a) Écrivons a et b sous forme trigonométrique.

- On a $|a| = |3(1 + i)| = 3|1 + i| = 3\sqrt{1^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}$.

  Donc

$$\begin{aligned} a = 3 + 3i &= 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + frac1\sqrt{2}i\right) \\ &= 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

  Donc : $a = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

  Alors : $a = \left[3\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right]$

- On a $b = 3 - 3i = \bar{a}$

  Alors : $b = \left[3\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$

  Donc : $b = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$

0,75 pt **b)** Montrons que b' l'affixe du point B',l'image du point B par la translation du vecteur

$\overrightarrow{OA}$ est b' $= 6$.

On a B' d'affixe b' l'image du point B par la translation du vecteur $\overrightarrow{OA}$

Donc : $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OA}$

D'où $aff(\overrightarrow{BB'}) = aff(\overrightarrow{OA})$

Donc : $b' - b = (a - 0)$

Donc : $b' = (a - 0) + b$

Alors : $b' = a + b$

Donc : $b' = 3 - 3i + 3 + 3i$

Alors : $b' = 6$

Donc l'affixe du point B',l' image du point B par la translation du vecteur $\overrightarrow{OA}$ est $b' = 6$.

0.5 pt **c)** Montrons que : $\dfrac{b - b'}{a - b'} = i$ puis en déduire que le triangle $AB'B$ est isocèle et rectangle en B'.

- On a :

$$\begin{aligned}\frac{b - b'}{a - b'} &= \frac{3 - 3i - 6}{3 + 3i - 6} \\ &= \frac{-3 - 3i}{-3 + 3i} \\ &= \frac{-3(1 + i)}{-3(1 - i)} \\ &= \frac{1 + i}{1 - i} \\ &= \frac{(1 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} \\ &= \frac{1 + 2i + i^2}{1^2 - i^2} \\ &= \frac{2i)}{2} = i\end{aligned}$$

Donc : $\dfrac{b - b'}{a - b'} = i$

- On a : $\dfrac{b - b'}{a - b'} = i$

Alors : $\dfrac{b - b'}{a - b'} = \left[1; \dfrac{\pi}{2}\right]$

0.5 pt Donc $\left|\dfrac{b - b'}{a - b'}\right| = 1$ et $arg\left(\dfrac{b - b'}{a - b'}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

0.5 pt Alors $\dfrac{B'B}{B'A} = 1$ et $\overline{(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{B'B})} \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

0.5 pt Donc $B'B = B'A$ et $\overline{(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{B'B})} \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

0.5 pt D'où le triangle $AB'B$ est isocèle et rectangle en B'

d) Déduisons que le quadrilatère $OAB'B$ est un carré . On a le point B' image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$

Donc $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OA}$

Alors le quadrilatère $OAB'B$ est un parallélogramme.

Et puisque le triangle $AB'B$ est isocèle et rectangle en B'

0.5 pt C-à-d $B'B = B'A$ et $(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{B'B}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

0.5 pt D'où le quadrilatère $OAB'B$ est un carré

Exercice 3 : (3,5 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{6u_n)}{15u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 pt **1 - a)** Montrons que : $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \frac{1}{3} &= \frac{6u_n}{15u_n + 1} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{18\,(u_n) - 15\,(u_n) - 1}{3\,(15u_n + 1)} \\ &= \frac{3u_n - 1}{3\,(u_n + 1)} \\ &= \frac{3\left(u_n - \frac{1}{3}\right)}{3\,(15u_n + 1)} \\ &= \frac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1} \end{aligned}$$

Donc : $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

0,5 pt **b)** Montrons que : $u_n > \dfrac{1}{3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Pour $n = 0$ on a $u_0 = 1$ et $1 > \dfrac{1}{3}$ d'où $u_0 > \dfrac{1}{3}$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

Supposons que $u_n > \dfrac{1}{3}$ pour n fixé de $\mathbb{N}$ et montrons que $u_{n+1} > \dfrac{1}{3}$ c'est-à-dire montrons que : $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} > 0$

On a d'après la question **1-a)** $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$

Et puisque $u_n > \dfrac{1}{3}$

Alors $u_n - \dfrac{1}{3} > 0$ et $15u_n + 1 > 6 > 0$

D'où $\dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1} > 0$donc $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} > 0$ d'où $u_{n+1} > \dfrac{1}{3}$

D'après le raisonnement par récurrence on a $u_n > \frac{1}{3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt

- Montrons que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$

  $\forall n \in \mathbb{N}$,on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1 - \frac{1}{3u_{n+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{3 \times \frac{6\,(u_n)}{15u_n + 1}} \\ &= 1 - \frac{1}{\frac{18\,(u_n)}{15u_n + 1}} \\ &= 1 - \frac{15u_n + 1}{18u_n} \\ &= \frac{18u_n - 15u_n - 1}{18u_n} \\ &= \frac{3u_n - 1}{18u_n} \\ &= \frac{3u_n}{18u_n} - \frac{1}{18u_n} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{18u_n} \\ &= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{3u_n}\right) \\ &= \frac{1}{6}v_n \end{aligned}$$

  Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{6}$

- Exprimons v_n en fonction de n

  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = v_0 \times q^{n-0} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

  Car $v_0 = 1 - \frac{1}{3u_0} = \frac{2}{3}$

  Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

0,5 pt

3 -

- Montrons que $u_n = \frac{1}{3 - 2 = (u_n)^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

  On sait que : $v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

  Alors : $\frac{1}{3u_n} = 1 - v_n$

  Donc : $3u_n = \frac{1}{1 - v_n}$

  D'où $u_n = \frac{1}{3 - 3v_n}$

Et comme $v_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

Donc $u_n = \dfrac{1}{3 - 3 \times \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n}$

Alors $u_n = \dfrac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$

D'où : $u_n = \dfrac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$

- Déduisons $\lim u_n$.

On a $\lim u_n = \lim \dfrac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$

Alors $\lim u_n = \dfrac{1}{3 - 2 \times 0} = \dfrac{1}{3}$

Car $-1 < \frac{1}{6} < 1$ donc $\lim \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$

0,75 pt D'où $\lim u_n = \frac{1}{3}$

Problème : (10 pts)

Partie I

On considère la fonction g définie sur $I =]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \ln x$

1 pt **1 - a)** Montrons que $g'(x) = \dfrac{x+1}{x}$ pour tout x de I

On a $u :\to x - 1$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ (restriction d'une fonction polynôme sur $]0, +\infty[$)

Et $v : x \to \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ (fonction primitive de la fonction $x \to \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$)

Donc $g = u + v$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$(\forall x \in]0, +\infty[\quad g'(x) = u'(x) + v'(x)$

Donc $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

Donc $g'(x) = \dfrac{x+1}{x}$

Finalement : $(\forall x \in]0, +\infty[\quad g'(x) = \dfrac{x+1}{x}$

b) Déduisons que la fonction g est croissante sur l'intervalle I.

On sait que le signe de $g'(x)$ sur $]0, +\infty[$ est le signe de $x + 1$

Et on a $(\forall x \in]0, +\infty[\quad x + 1 \geq 0$

En déduire que $g'(x) \geq 0$ pour tout x de l'intervalle I

Donc g est croissante sur l'intervalle I

0.5 pt **0.5 pt** **2 -** Déduisons que $g(x) \leq 0$ pour tout x de l'intervalle $]0,1]$ et que $g(x) \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[1,+\infty[$. (remarquer que $g(1) = 0$).

On sait que g est croissante sur $I =]0,+\infty[$

- Sur l'intervalle $]0,1]$

0.5 pt On a $0 < x \leq 1$ donc $x \leq 1$

0.5 pt Alors $g(x) \leq g(1)$ (car g une fonction continue et croissante sur $]0,1]$)

Or $g(1) = 0$

D'où $g(x) \leq 0$ pour tout x de l'intervalle $]0,1]$

- Sur l'intervalle $[1,+\infty[$

On a $1 \leq x$

0.5 pt Alors $g(1) \leq g(x)$ (car g une fonction continue et croissante sur $[1,+\infty[$)

Or $g(1) = 0$

D'où $g(x) \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[1,+\infty[$

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$ et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$(unité 1 cm).

0.5 pt **1 - a)** Montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{x-1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$

Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

D'où (C_f) admet une asymptote verticale à droite de 0 d'équation $x = 0$

0.5 pt **b)** • Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x\\ &= +\infty\end{aligned}$$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

- Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\ln x}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)\frac{\ln x}{x}\\&=0\end{aligned}$$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

0.25 pt **c)** Déduisons que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction à déterminer.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

Alors (C_f) admet une branche parabolique vers l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

1 pt **2 - a)** Montrons que : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ pour tout x de I.

On sait que $f_1 : x\to\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$ est dérivable sur $I=]0,+\infty[$

Et aussi la fonction $f_2 : x\to\ln x$ est dérivable sur $I=]0,+\infty[$

Donc $f=f_1\times f_2$ est dérivable sur $I=]0,+\infty[$.

Et on a $(\forall x\in]0,+\infty[)$:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x\right)'\\&=\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x\right)'\\&=\left(1-\frac{1}{x}\right)'\ln x+\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x)'\\&=\left(0+\frac{1}{x^2}\right)\ln x+\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\\&=\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\\&=\frac{x-1+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}\end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

b) Déduisons que la fonction f est décroissante sur $]0,1]$ et que la fonction f est croissante sur $[1,+\infty[$.

On a $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad , f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

Donc le signe $f'(x)$ est celui de $g'(x)$

- Comme $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0,1]$

  D'où $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad f'(x) \leq 0$

  donc : f est décroissante sur $]0,1]$.

- Comme $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1,+\infty[$

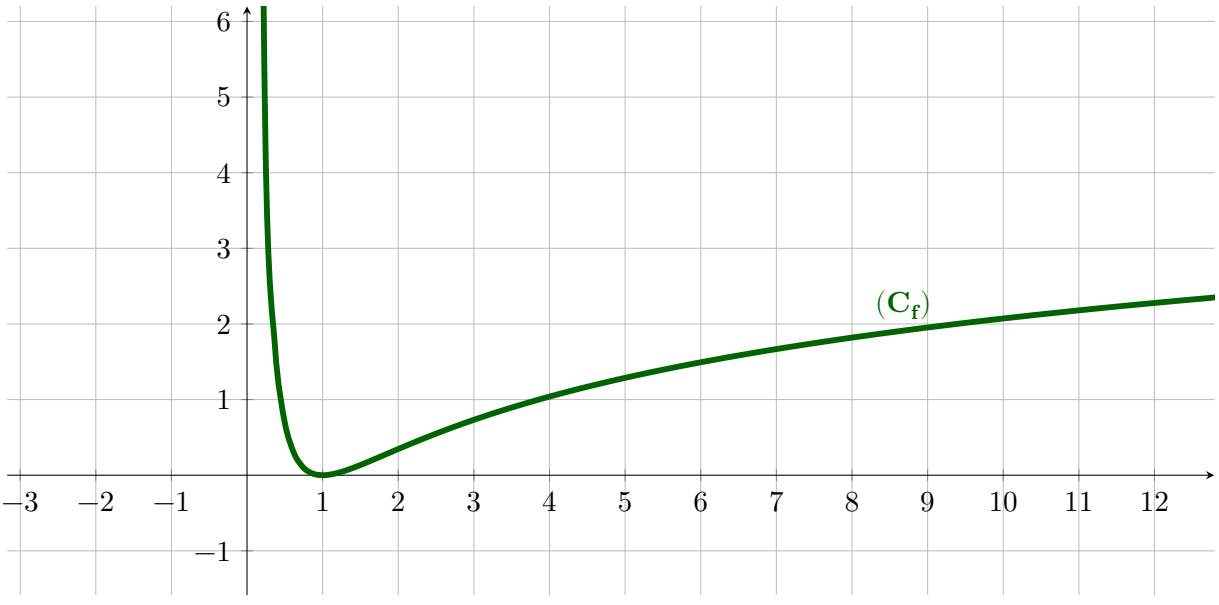
  D'où $(\forall x \in [1,+\infty[) \quad f'(x) \geq 0$

  donc : f est croissante sur $[1,+\infty[$.

c) Dressons le tableau des variations de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
(C_f)	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

0.75 pt **3 -** Construisons, la courbe (C_f). (on admettra que (C_f) possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 1,5 et 2)



0.75 pt **4 - a)** Montrons que $H : x \mapsto \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

sur $]0,+\infty[$

On a H est dérivable sur $]0,+\infty[$ (comme le produit de deux fonction dérivables) et on a $\forall x \in]0,+\infty[$:

$H'(x) = \frac{1}{2}\left((\ln x)^2\right)' = \frac{1}{2} \times 2(\ln x) \times \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x} = h(x)$

Donc : H est une fonction primitive de la fonction h sur $]0,+\infty[$

b) Montrons que : $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$.

On a :

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx &= \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e \\ &= \frac{1}{2}(\ln e)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{2} \times 0 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc : $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$

0.5 pt **c)** Montrons, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_1^e \ln x dx = 1$

On pose : $\begin{cases} U(x) = \ln x \\ V'(x) = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} U'(x) = \frac{1}{x} \\ V(x) = x \end{cases}$.

On a :

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x dx &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 dx \\ &= e\ln(e) - 1\ln(1) - [x]_1^e \\ &= e - e + 1 = 1\end{aligned}$$

Donc : $\int_1^e \ln x dx = 1$

5 - a) Vérifions que : $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x}$ pour tout x de l'intervalle $I =]0,+\infty[$

Soit $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x \\ &= \left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x \\ &= \ln x - \frac{\ln x}{x} \end{aligned}$$

Donc : $f(x) = \ln x - \dfrac{\ln x}{x}$

0.5 pt

b) Montrons que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ est égale à $0,5\mathrm{cm}^2$.

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$

On sait que $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} |f(x)|\mathrm{d}x \times u.m.s$

Comme f est croissante sur $[1, +\infty[$

Donc si $1 \leq x \leq e$ alors $f(1) \leq f(x) \leq f(e)$

Donc $0 \leq f(x) \leq 1 - \dfrac{1}{e}$ car $f(e) = \left(\dfrac{e-1}{e}\right)\ln e = 1 - \dfrac{1}{e}$

Donc $\forall x \in [1, e]$ on a $f(x) \geq 0$ et $|f(x)| = f(x)$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x \times 1^2 cm^2 \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} \ln x - \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x.cm^2 \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} \ln x \mathrm{d}x.cm^2 - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x.cm^2 \\ &= 1cm^2 - \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e .cm^2 \\ &= 1cm^2 - \left(\frac{1}{2}(\ln e)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2\right).cm^2 \\ &= 1cm^2 - \frac{1}{2}cm^2 \\ &= \frac{1}{2}cm^2 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}cm^2$