Exercice 1 — Session : NORMAL 2011 — 2.5 Pts

1 - a) (0,5 pt) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 + 4x - 5 = 0$.

b) (1 pt) Résoudre dans l'intervalle $]0; +\infty[$ l'équation : $\ln(x^2+5) = \ln(x+2) + \ln(2x)$

2 - (1 pt) Résoudre dans l'intervalle $]0; +\infty[$ l'inéquation : $\ln x + \ln(x+1) \geq \ln(x^2+1)$

Exercice 2 — Session : NORMAL 2011 — 3 Pts

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{5+8u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 - (0,5 pt) Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - On pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) (1,5 pt) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 5 puis exprimer v_n en fonction de n.

b) (1 pt) Montrer que $u_n = \dfrac{1}{3\times 5^n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 — Session : NORMAL 2011 — 5 Pts

1 - (1 pt) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 18z + 82 = 0$$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 9 + i \quad , \quad b = 9 - i \quad \text{et} \quad c = 11 - i.$$

a) (1 pt) Montrer que $\frac{c-b}{a-b} = -i$ puis en déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

b) (0,5 pt) Donner une forme trigonométrique du nombre complexe $4(1-i)$.

c) (1 pt) Montrer que : $(c-a)(c-b) = 4(1-i)$ puis en déduire que : $AC \times BC = 4\sqrt{2}$.

d) Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre B et d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

(1,5 pt) Montrer que : $z' = -iz + 10 + 8i$ puis vérifier que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est $9 - 3i$.

Exercice **4** **Session : NORMAL 2011** **9.5 Pts**

Partie I

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1-x)e^x - 1$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $g'(x) = -xe^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0,75 pt **b)** Montrer que la fonction g est décroissante sur $[0; +\infty[$ et croissante sur $]-\infty; 0]$ et vérifier que $g(0) = 0$

0,5 pt **2 -** En déduire que : $g(x) \leq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Partie II

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2-x)e^x - x$. et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1 cm).

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

0,75 pt **b)** Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on précisera la direction.

0,75 pt **2 - a)** Montrer que : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ puis calculer $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]$.

(on rappelle que : $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$).

0,25 pt **b)** Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

0,5 pt **3 - a)** Montrer que : $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0,25 pt **b)** Interpréter géométriquement le résultat : $f'(0) = 0$

0,5 pt **c)** Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

0,5 pt **4 -** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ (on admettra que $e^{\frac{3}{2}} > 3$).

0,5 pt **5 - a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) + x = 0$ et en déduire que (C) et (D) se coupent au point $A(2; -2)$.

0,25 pt **b)** Étudier le signe de $f(x)+x$ sur $\mathbb{R}$.

0,25 pt **c)** En déduire que (C) est au-dessus de (D) sur $]-\infty;2[$ et en-dessous de (D) sur $]2;+\infty[$.

0,5 pt **6 - a)** Montrer que la courbe (C) possède un point d'inflexion unique de coordonnées $(0;2)$.

1 pt **b)** Construire la droite (D) et la courbe (C) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 pt **7 - a)** Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\displaystyle\int_{-1}^{0} 2-xe^{x}\mathrm{d}x = 3-\frac{4}{e}$

0,25 pt **b)** En déduire, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x=-1$ et $x=0$.

FIN