Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2011 — 3 Pts

1 - a) (0.5 pt) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 2x - 3 = 0$

b) (1 pt) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^x - \dfrac{3}{e^x} - 2 = 0$

2 - (1 pt) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{x+1} - e^{-x} \geq 0$

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2011 — 4 Pts

1 - (1 pt) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 18 = 0$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les deux points A et B ayant respectivement les affixes : $a = 3 + 3i$ et $b = 3 - 3i$

a) (0.5 pt) Écrire sous la forme trigonométrique les deux nombres a et b

b) (0.75 pt) Montrer que b' l'affixe du B' l'image de B par translation qui a le vecteur $\overrightarrow{OA}$ est 6

c) Montrer que : $\dfrac{b - b'}{a - b'} = i$ puis déduire que le triangle $AB'B$ est isocèle et rectangle en B' (1 pt)

d) (0.75 pt) Déduire d'après ce qui précède que le quadrilatère $OAB'B$ est un carré

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2011 — 3.5 Pts

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{6u_n}{1 + 15u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 - a) (0.5 pt) Vérifier que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{u_n - \dfrac{1}{3}}{15u_n + 1}$

b) (0.5 pt) Montrer par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_n > \dfrac{1}{3}$

2 - On considère la suite numérique (v_n) définie par, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $v_n = 1 - \dfrac{1}{3u_n}$

(1.5 pt) Montrer que : (v_n) est une suite géométrique son raison $\dfrac{1}{6}$ puis écrire v_n en fonction de n

3 - (1 pt) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{1}{3 - 2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}$ puis déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2011 — 10 Pts

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $I =]0, +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \ln x$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que pour tout $x \in I$: $g'(x) = \dfrac{x+1}{x}$

0.5 pt **b)** Montrer que la fonction g est croissante sur I

1 pt **2 -** Déduire que : $g(x) \geq 0$ sur $[1, +\infty[$ et que $g(x) \leq 0$ sur $]0, 1]$ (remarquer que $g(1) = 0$)

Partie II

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x}\right) \ln x$

et Soit (C) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$(l'unité 1 cm)

0.75 pt **1 - a)** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ et interpréter le résultat géométriquement

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ $\left($remarquer que pour tout x de I :

1 pt $\dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)\dfrac{\ln x}{x}$ $\right)$

c) Déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ qu'on

0.5 pt détermine sa direction

1 pt **2 - a)** Montrer que pour tout $x \in I$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

0.5 pt **b)** Déduire que f est croissante sur $[1, +\infty[$ et décroissante sur $]0, 1]$

0.25 pt **c)** Donner le tableau de variation de f sur I

3 - Tracer (C)(On admettera que la courbe (C)posssède un seul point d'inflexion d'abscisse

1 pt compris entre 1.5 et 2)

0.5pt **4 - a)** Montrer que : $H : x \longrightarrow \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de $h : x \longrightarrow \dfrac{\ln x}{x}$ sur l'intervalle I

0.75 pt **b)** Montrer que : $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{1}{2}$

1 pt **c)** On utilisant l'intégration par partie, montrer que : $\displaystyle\int_1^e \ln x\, dx = \frac{1}{2}$

0.25pt **5 - a)** Vérifier que pour tout $x \in I$: $f(x) = \ln x - \dfrac{\ln x}{x}$

b) Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les

0.5pt deux droite d'équations $x = 1$ et $x = e$ est $0.5cm^2$

FIN