ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : RATTRAPAGE 2012

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

On considère, dans L'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les points $A(-3,0,0), B(0,0,-3)$ et $C(0,2,-2)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1,1,1)$ et de rayon 3.

0.75 pt **1 - a)**

- Montrons que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=6\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$.

  On a : $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ donc $\overrightarrow{AB}(3;0;-3)$

  Et on a $\overrightarrow{AC}(x_C-x_A;y_C-y_A;z_C-z_A)$ donc $\overrightarrow{AC}(3;2;-2)$

  $$\text{Donc : } \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ -3 & -2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3 & 3\\ -3 & -2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$
  $$=(0\times(-2)-(-3)\times 2)\vec{i}-(3\times(-2)-(-3)\times 3)\vec{j}+(3\times 2-0\times 3)\vec{k}$$
  $$=6\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$$

  D'où : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=6\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$

- Déduisons que $2x-y+2z+6=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

  On a : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normale au plan (ABC)

  Donc : $(ABC): 6x-3y+6z+d=0$

  Et puisque $A\in(ABC)$ donc $6x_A-3y_A+6z_A+d=0$

  D'où $-18-0+0+d=0$ donc $d=18$

  Alors : $(ABC): 6x-3y+6z+18=0$, c'est à dire : $(ABC): 2x-y+2z+6=0$

  D'où $2x-y+2z+6=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0.75 pt **b)**

- Calculons $d(\Omega,(ABC))$

  On a $(ABC): 2x-y+2z+6=0$ et $\Omega(1,1,1)$

  Donc : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|2x_\Omega-y_\Omega+2z_\Omega+6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{|2-1+2+6|}{\sqrt{9}}=\dfrac{9}{3}=3$

  D'où $d(\Omega,(ABC))=3$

- Déduisons que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

On a $d(\Omega,(ABC))=3$ et $R=3$, alors $d(\Omega,(ABC))=3$

Donc le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

2 - Soit (D) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

0.5 pt **a)** Démontrons que $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1+2t \end{cases} /(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (D).

Soit $M(x,y,z)\in(D)$. On a : $2x-y+2z+6=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC), alors le vecteur $\vec{n}(2;-1;2)$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Et puisque la droite (D) est perpendiculaire au plan (ABC) alors $\vec{n}(2;-1;2)$ est un vecteur directeur à la droite (D)

Et on a $\Omega\in(D)$, alors $\overrightarrow{\Omega M}=t\times\vec{n}$ avec $t\in\mathbb{R}$

Donc : $\begin{cases} x-1=2t \\ y-1=-t \\ z-1=2t \end{cases} /(t\in\mathbb{R})$

D'où $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1+2t \end{cases} /(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (D).

0.5 pt **b)** Démontrons le triplet des coordonnées de H point de contact du plan (ABC) et la sphère (S) est $(-1;2;-1)$.

On sait que le plan (ABC) est langent à la spphère (S) en H, alors H est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (ABC)

Et comme la droite (D) passe par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC), alors H est le point d'intersection de la droite (D) et le plan (ABC)

Donc les coordonnées de H vérifient le système $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1+2t \\ 2x-y+2z+6=0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x_H=1+2t \\ y_H=1-t \\ z_H=1+2t \\ 2x_H-y_H+2z_H+6=0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x_H=1+2t \\ y_H=1-t \\ z_H=1+2t \\ 2(1+2t)-(1-t)+2(1+2t)+6=0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x_H=1+2t \\ y_H=1-t \\ z_H=1+2t \\ 2+4t-1+t+2+4t+6=0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x_H = 1+2t \\ y_H = 1-t \\ z_H = 1+2t \\ 9t+9=0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x_H = 1+2t \\ y_H = 1-t \\ z_H = 1+2t \\ t=-1 \end{cases}$

On remplace t par -1 on obtient $\begin{cases} x_H = 1-2 \\ y_H = 1+1 \\ z_H = 1-2 \end{cases}$, c'est à dire : $\begin{cases} x_H = -1 \\ y_H = 2 \\ z_H = -1 \end{cases}$

Finalement le triplet des coordonnées de H est $(-1;2;-1)$.

Exercice 2 : (3 pts)

On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives : $a=2-i$, $b=6-7i$ et $c=8+3i$.

0.75 pt **1 - a)** Montrons que $\dfrac{c-a}{b-a}=i$.

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{c-a}{b-a} &= \frac{8+3i-(2-i)}{6-7i-(2-i)} \\
&= \frac{8+3i-2+i}{6-7i-2+i} \\
&= \frac{6+4i}{4-6i} \\
&= \frac{2(3+2i)}{2(2-3i)} \\
&= \frac{3+2i}{2-3i} \\
&= \frac{(3+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} \\
&= \frac{6+9i+4i+6i^2}{2^2-(3i)^2} \\
&= \frac{6+13i-6}{4-(-9)} \\
&= \frac{13i}{13} \\
&= i
\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{c-a}{b-a}=i$.

0.75 pt **b)** Déduisons que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

On a $\dfrac{c-a}{b-a}=i$, donc $\begin{cases}\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|=|i|\\ arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\equiv arg(i)[2\pi]\end{cases}$

Donc $\begin{cases}\dfrac{|c-a|}{|b-a|}=1\\ arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc $\begin{cases}|c-a|=|b-a|\\ arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Alors $\begin{cases}AC=AB\\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Et par suite, le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

2 - Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω milieu du segment $[BC]$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

0.5 pt **a)** Vérifions que l'affixe du point Ω est $\omega=7-2i$.

On a Ω est le milieu du segment $[BC]$.

Donc : $aff(\Omega)=\dfrac{aff(B)+aff(C)}{2}$

Alors : $\omega=\dfrac{b+c}{2}=\dfrac{6-7i+8+3i}{2}=\dfrac{14-4i}{2}=\dfrac{14}{2}-\dfrac{4}{2}i=7-2i$

Donc l'affixe du point Ω est $\omega=7-2i$.

0.75 pt **b)** Montrons que $z'=-iz+9+5i$.

On a :

$$\begin{aligned}R(M)=M' &\Leftrightarrow z'=e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-\omega)+\omega\\ &\Leftrightarrow z'=\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)(z-(7-2i))+7-2i\\ &\Leftrightarrow z'=-i(z-7+2i))+7-2i\\ &\Leftrightarrow z'=-iz+7i-2i^2+7-2i\\ &\Leftrightarrow z'=-iz+7i+2+7-2i\\ &\Leftrightarrow z'=-iz+9+5i\end{aligned}$$

Donc $z'=-iz+9+5i$.

0.25 pt **c)** Montrons que le point C est l'image du point A par la rotation R.

Soit A' l'image de A par R. On a :

$$\begin{aligned} R(A) = A' &\Leftrightarrow z_{A'} = -ia + 9 + 5i \\ &\Leftrightarrow z_{A'} = -i(2-i) + 9 + 5i \\ &\Leftrightarrow z_{A'} = -2i + i^2 + 9 + 5i \\ &\Leftrightarrow z_{A'} = -2i - 1 + 9 + 5i \\ &\Leftrightarrow z_{A'} = 8 + 3i \\ &\Leftrightarrow z_{A'} = c \end{aligned}$$

Et par suite, le point C est l'image du point A par la rotation R.

Exercice 3 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 3}{3u_n + 4}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **1 -** Montrons par récurrence que $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Pour $n = 0$ on a $u_0 = 3$ et $3 > 1$ d'où $u_0 > 1$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

Supposons que $u_n > 1$ pour n fixé de $\mathbb{N}$ et montrons que $u_{n+1} > 1$ c'est-à-dire montrons que $u_{n+1} - 1 > 0$

On a $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n - 1}{3u_n + 4}$

Et puisque $u_n > 1$ alors $u_n - 1 > 0$ et $3u_n + 4 > 7$

D'où $\dfrac{u_n - 1}{3u_n + 4} > 0$ donc $u_{n+1} - 1 > 0$ d'où $u_{n+1} > 1$

D'après le raisonnement par récurrence on a $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - On pose : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **a)**

- Vérifions que $1 - v_n = \dfrac{2}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

  Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $1 - v_n = 1 - \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} = \dfrac{u_n + 1 - u_n + 1}{u_n + 1} = \dfrac{2}{u_n + 1}$

  Donc $1 - v_n = \dfrac{2}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- Déduisons que $1 - v_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

  Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $1 - v_n = \dfrac{2}{u_n + 1}$, et on a $u_n > 1$, donc $u_n + 1 > 2$, alors $\dfrac{2}{u_n + 1} > 0$, d'où $1 - v_n > 0$

  Donc $1 - v_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **b)** Montrons que $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $1 - v_n = \dfrac{2}{u_n + 1}$ et $1 - v_n \neq 0$ (car $1 - v_n > 0$), donc $\dfrac{1}{1 - v_n} = \dfrac{u_n + 1}{2}$,

alors $\dfrac{2}{1-v_n} = u_n + 1$, d'où $u_n = \dfrac{2}{1-v_n} - 1 = \dfrac{2-1+v_n}{1-v_n} = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$

Donc $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 pt **3 - a)**

- Montrons que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{7}$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

  $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\dfrac{4u_n+3}{3u_n+4} - 1}{\dfrac{4u_n+3}{3u_n+4} + 1} = \frac{u_n-1}{3u_n+4} \times \frac{3u_n+4}{7u_n+7} = \frac{u_n-1}{7(u_n+1)} = \frac{1}{7} \times \frac{u_n-1}{u_n+1}$$

  Donc $\forall n \in \mathbb{N}\,;\ v_{n+1} = \dfrac{1}{7} v_n$

  Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{7}$.

- Exprimons v_n en fonction de n

  Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n = v_0 \times q^{n-0} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$ car $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+1} = \dfrac{3-1}{3+1} = \dfrac{1}{2}$

  Donc $v_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **b)**

- Calculons la limite de la suite (v_n)

  On a $\lim v_n = \lim \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n = 0$

  Car $-1 < \dfrac{1}{7} < 1$ c'est-à-dire $\lim \left(\dfrac{1}{7}\right)^n = 0$

  Donc $\lim v_n = 0$.

- Déduisons la limite de la suite (u_n)

  On sait que $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$ et $v_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

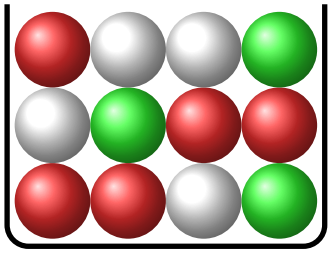
  Donc $u_n = \dfrac{1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

  Alors $\lim u_n = 1$ Car $\lim \left(\dfrac{1}{7}\right)^n = 0$

  Donc $\lim u_n = 1$.

Exercice 4 : (3 pts)

Une urne contient *cinq* boules rouges, *quatre* boules blanches et *trois* boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher). On tire au hasard, simultanément, *trois* boules de l'urne.



1 pt **1 -** Montrons que la probabilité de tirer trois boules rouges est $\frac{1}{22}$.

On considère l'univers Ω, le tirage est simultané donc $card(\Omega) = C_{12}^3 = 220$

Soit A l'événement : "Tirer trois boules rouges"

Les boules sont indiscernables au toucher, donc $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$

On a $A : (R, R, R)$, donc $card(A) = C_5^3 = 10$, alors $P(A) = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$

Donc la probabilité de tirer trois boules rouges est $\frac{1}{22}$.

1 pt **2 -** Montrons que la probabilité de tirer trois boules de même couleur est $\frac{3}{44}$.

Soit B l'événement : "Tirer trois boules de même couleur"

Les boules sont indiscernables au toucher, donc $P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)}$

On a $B : (R, R, R)$ ou (B, B, B) ou (V, V, V), donc $card(B) = C_5^3 + C_4^3 + C_3^3 = 10+4+1 = 15$,

alors $P(B) = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$

Donc la probabilité de tirer trois boules de même couleur est $\frac{3}{44}$.

1 pt **3 -** Montrons que la probabilité de tirer une boule rouge au moins est $\frac{37}{44}$.

Soit C l'événement : "Tirer une boule rouge au moins"

Les boules sont indiscernables au toucher, donc $P(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)}$

On a $\overline{C} : (\overline{R}, \overline{R}, \overline{R})$, donc $card(\overline{C}) = C_7^3 = 35$, alors $P(\overline{C}) = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$

Donc $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{7}{44} = \frac{37}{44}$

Donc la probabilité de tirer une boule rouge au moins est $\frac{37}{44}$.

Problème : (8 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 1 cm).

0.75 pt **1 -** • Montrons que $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
f(-x) &= -x + \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} \\
&= -x + \frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1} \\
&= -x + \frac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}} \\
&= -x + \frac{1-e^x}{e^x} \times \frac{e^x}{1+e^x} \\
&= -x + \frac{1-e^x}{1+e^x} \\
&= -x + \frac{-(e^x-1)}{e^x+1} \\
&= -x - \frac{e^x-1}{e^x+1} \\
&= -\left(x + \frac{e^x-1}{e^x+1}\right) \\
&= -f(x)
\end{aligned}$$

Donc $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

- Déduisons que le point O est centre de symétrie de (C).

  On a $\forall x \in \mathbb{R}; (-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = -f(x))$

  Donc la fonction f est impaire

  Alors (C) est symétrique par rapport à l'origine du repère

  D'où O est centre de symétrie de (C)

0.5 pt **2 -** Vérifions que $f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x+1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
f(x) &= x + \frac{e^x+1-1-1}{e^x+1} \\
&= x + \frac{e^x+1-2}{e^x+1} \\
&= x + \frac{e^x+1}{e^x+1} + \frac{-2}{e^x+1} \\
&= x + 1 - \frac{2}{e^x+1}
\end{aligned}$$

Donc $f(x) = x + 1 - \dfrac{2}{e^x + 1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

1.25 pt **3 - a)** • Montrons $f'(x) = 1 + \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

On a : La fonction $f_1 : x \mapsto x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Et la fonction $f_2 : x \mapsto \dfrac{-2}{e^x + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car $x \mapsto e^x + 1$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$)

Donc $f = f_1 + f_2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= f_1'(x) + f_2'(x) \\ &= 1 + (-2) \times \frac{-e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= 1 + \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} \end{aligned}$$

Donc $f'(x) = 1 + \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

• Vérifions que $f'(0) = \dfrac{3}{2}$.

On a : $f'(x) = 1 + \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

Donc $f'(0) = 1 + \dfrac{2e^0}{(e^0+1)^2} = 1 + \dfrac{2}{2^2} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

D'où $f'(0) = \dfrac{3}{2}$.

0.5 pt **b)** Montrons que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $f'(x) = 1 + \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

Et comme $2e^x > 0$ et $(e^x+1)^2 > 0$, alors $f'(x) > 0$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

0.5 pt **c)** Montrons que $y = \dfrac{3}{2}x$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point 0.

On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable en 0

Donc (C) admet une tangente (T) au point d'abscisse 0 d'équation :

$(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

Et comme $f'(0) = \dfrac{3}{2}$ et $f(0) = 0 + 1 - \dfrac{2}{e^0+1} = 1 - \dfrac{2}{2} = 1 - 1 = 0$

Alors $(T) : y = \dfrac{3}{2}x$

D'où $y = \frac{3}{2}x$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point 0

0.5 pt **4 - a)** Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 - \dfrac{2}{e^x+1} = +\infty$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x+1} = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

0.5 pt **b)** Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (x+1))$, et déduisons que la droite (D) d'équation $y = x+1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 - \dfrac{2}{e^x+1} - (x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{e^x+1} = 0$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{e^x+1} = 0$

Et par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = 0$.

D'où la droite (D) d'équation $y = x+1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

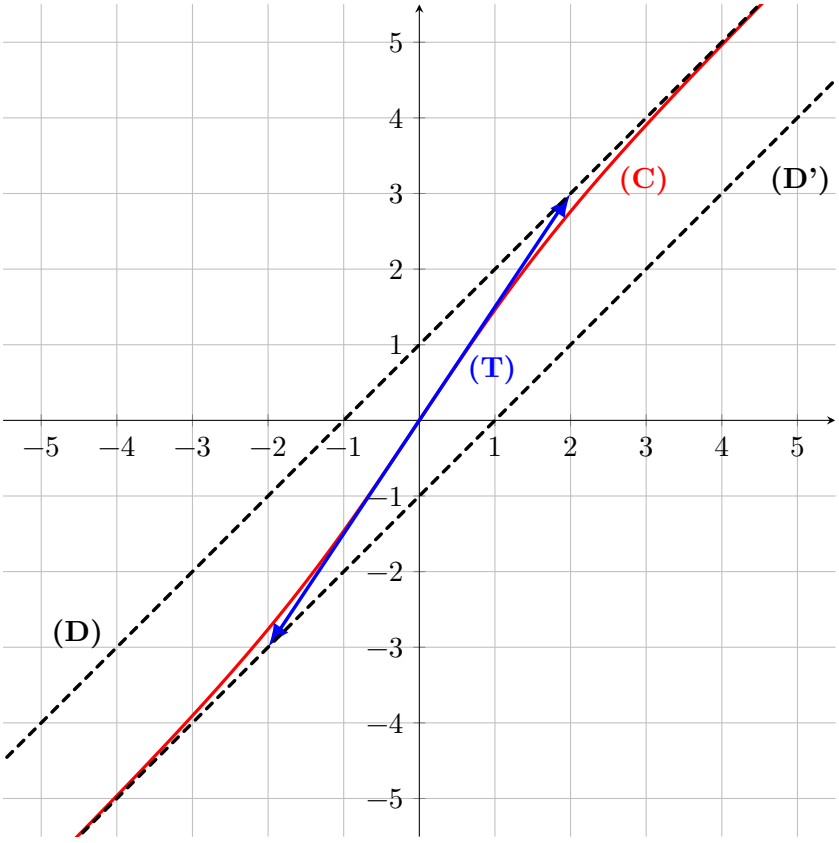
0.25 pt **c)** Montrons que la courbe (C) est au-dessous de la droite (D).

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $f(x) - (x+1) = \dfrac{-2}{e^x+1}$, et puisque $-2 < 0$ et $e^x + 1 > 0$

Alors $\dfrac{-2}{e^x+1} < 0$, c'est à dire $f(x) - (x+1) < 0$

D'où la courbe (C) est au-dessous de la droite (D).

1.5 pt **5 -** Construisons les deux droites (D) et (T) et la courbe (C).



0.75 pt **6 - a)** Montrons la fonction $H : x \mapsto x - \ln(e^x + 1)$ est une fonction primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

On a H est dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} H'(x) &= 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} \\ &= \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} \\ &= \frac{1}{e^x + 1} \end{aligned}$$

Donc $H : x \mapsto x - \ln(e^x + 1)$ est une fonction primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

0.5 pt **b)** Déduisons que $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} \mathrm{d}x = \ln 4 - \ln 3$.

On sait que H est une fonction primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} \mathrm{d}x &= [x - \ln(e^x + 1)]_0^{\ln 2} \\ &= (\ln 2 - \ln(e^{\ln 2} + 1)) - (0 - \ln(e^0 + 1)) \\ &= (\ln 2 - \ln 3) - (-\ln 2) \\ &= \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 \\ &= 2\ln 2 - \ln 3 \\ &= \ln(2^2) - \ln 3 \\ &= \ln 4 - \ln 3 \end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} \mathrm{d}x = \ln 4 - \ln 3$.

0.5 pt **c)** Calculons, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$.

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^{\ln 2} |f(x) - (x+1)| \mathrm{d}x \times u_A \\
&= \int_0^{\ln 2} \left| \frac{-2}{e^x + 1} \right| \mathrm{d}x \times 1^2 cm^2 \\
&= \int_0^{\ln 2} \frac{2}{e^x + 1} \mathrm{d}x.cm^2 \\
&= 2 \times \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} \mathrm{d}x.cm^2 \\
&= 2\left(\ln 4 - \ln 3\right).cm^2 \\
&= \left(2\ln 4 - 2\ln 3\right).cm^2 \\
&= \left(\ln(4^2) - \ln(3^2)\right).cm^2 \\
&= \left(\ln(16) - \ln(9)\right).cm^2
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A} = \left(\ln(16) - \ln(9)\right).cm^2$.