Exercice 1 — Session : NORMAL 2012 — 3 Pts

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, les points $A(1,1,-1)$, $B(0,1,-2)$, $C(3,2,1)$ et la sphère (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0$

0.5 pt **1 -** Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,0,1)$ et que son rayon est $\sqrt{3}$

2 - a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}$ puis vérifier que $x-z-2=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) **0.75 pt**

b) Vérifier que : $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{2}$ puis en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon 1 **1 pt**

3 - Soit (Δ) la droite qui passe par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC)

a) Démontrer que : $\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) **0.25 pt**

b) Démontrer que le triplet de coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (ABC) est $(2,0,0)$ **0.25 pt**

c) En déduire le centre du cercle (Γ) **0.25 pt**

Exercice 2 — Session : NORMAL 2012 — 3 Pts

0.75 pt **1 -** Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2-12z+61=0$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, les A, B ,et C d'affixes respectives $a=6-5i$, $b=4-2i$,et $c=2+i$

a) Calculer $\dfrac{a-c}{b-c}$ puis déduire que les points A, C et D sont alignés **0.5 pt**

b) On considère la translation T de vecteur $\vec{u}$ tel que l'affixe de $\vec{u}$ est $1+5i$

Vérifier que l'affixe du point D image du point C par la translation T est $d=3+6i$ **0.5 pt**

0.75 pt **c)** Montrer que : $\frac{d-c}{b-c} = -1+i$ et que $\frac{3\pi}{4}$ est l'argument du nombre complexe $-1+i$

0.5 pt **d)** En déduire une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}}\right)$

Exercice 3 — Session : NORMAL 2012 — 3 Pts

Une urne contient huit jetons indiscernables au toucher : un jeton portant le nombre 0, cinq jetons portant chacun le nombre 1 et deux jetons portant chacun le nombre 2

On tire au hasard, et simultanément, trois jetons de l'urne

1 - Soit A l'événement : " Les trois jetons tirés portent des nombres différents deux à deux ".

1 pt Montrer que : $P(A) = \frac{5}{28}$

2 - Soit B l'événement : " La somme des nombres portés par les jetons tirés est égale à 5 ".

1 pt Montrer que : $P(B) = \frac{5}{56}$

3 - Soit C l'événement : "La somme des nombres portés par les jetons tirés est égale à 4 ".

1 pt Montrer que : $P(C) = \frac{3}{8}$

Exercice 4 — Session : NORMAL 2012 — 3 Pts

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 11$ et $u_{n+1} = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.25 pt **1 -** Vérifier que : $u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **2 - a)** Montrer, par récurrence, que : $u_n < 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **b)** Montrer que la suite (u_n) est croissante

0.25 pt **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente

3 - Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$:

a) On utilisant la question **1)**, montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{10}{11}$,

0.75 pt puis exprimer v_n en fonction de n

0.75 pt **b)** Montrer que : $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et calculer la limite du suite (u_n)

Exercice 5 — Session : NORMAL 2012 — 8 Pts

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x$

1 - Montrer que : $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont le même signe sur l'intervalle $]0;1[$ puis déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;1]$ — **0.75 pt**

2 - Montrer que $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont le même signe sur l'intervalle $]1;+\infty[$ puis déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;+\infty[$ — **0.75 pt**

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = (x^2 - 1)\ln x$

Et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$(unité : **3cm**)

1 - a) Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement — **0.5 pt**

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ (On pourra écrire $\dfrac{f(x)}{x}$ sous la forme $\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)\ln x$)

et en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on précisera la direction — **1 pt**

2 - a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$ et interpréter géométriquement le résultat $f'(1) = 0$ — **1.25 pt**

b) Montrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ et croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$ — **0.5 pt**

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ puis montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout x appartennant à l'intervalle $]0;+\infty[$ — **0.5 pt**

3 - Construire la courbe (C) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ — **1 pt**

4 - a) Montrer que $u : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$ — **0.5 pt**

1 pt

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que : $\int_1^2 (x^2-1)\ln x \mathrm{d}x = \frac{2}{9}(1+3\ln 2)$

c) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et

0.25 pt

les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

FIN