Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2012 — 3 Pts

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les points $A(-3,0,0)$, $B(0,0,-3)$ et $C(0,2,-2)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1,1,1)$ et de rayon 3.

1.25 pt **1 - a)** Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=6\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ puis en déduire que $2x-y+2z+6=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

0.75 pt **b)** Calculer $d(\Omega,(ABC))$ puis en déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

2 - Soit (D) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

0.5 pt **a)** Montrer que $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=1+2t \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite (D).

0.5 pt **b)** Démontrer que le triplet de coordonnées de H point de contact du plan (ABC) et la sphère (S) est $(-1,2,-1)$.

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2012 — 3 Pts

On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A,B et C d'affixes respectives : $a=2-i, b=6-7i$ et $c=8+3i$.

0.75 pt **1 - a)** Montrer que : $\dfrac{c-a}{b-a}=i$.

0.75 pt **b)** En déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

2 - Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω milieu du segment $[BC]$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

0.5 pt **a)** Vérifier que l'affixe du point Ω est $\omega=7-2i$.

0.75 pt **b)** Montrer que $z'=-iz+9+5i$.

0.25 pt **c)** Montrer que le point C est l'image du point A par la rotation R.

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2012 — 3 Pts

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 3}{3u_n + 4}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **1 -** Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **a)** Vérifier que $1 - v_n = \dfrac{2}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 - v_n > 0$.

0.5 pt **b)** Montrer que $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 pt **3 - a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{7}$ et exprimer v_n en fonction de n.

0.5 pt **b)** Montrer que $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$ et en déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2012 — 3 Pts

Une urne contient cinq boules rouges, quatre boules blanches et trois boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne.

1 pt **1 -** Montrer que la probabilité de tirer trois boules rouges est $\dfrac{1}{22}$.

1 pt **2 -** Montrer que la probabilité de tirer trois boules de même couleur est $\dfrac{3}{44}$.

1 pt **3 -** Montrer que la probabilité de tirer une boule rouge au moins est $\dfrac{37}{44}$.

Exercice 5 — Session : RATTRAPAGE 2012 — 8 Pts

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

Et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

0.75 pt **1 -** Montrer que $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire que le point O est centre de symétrie de la courbe (C).

0.5 pt **2 -** Vérifier que $f(x) = x + 1 - \dfrac{2}{e^x + 1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

(il est préférable d'utiliser cette expression de $f(x)$ pour traiter les questions qui suivent)

1.25 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = 1 + \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et vérifier que $f'(0) = \dfrac{3}{2}$.

0.5 pt **b)** Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

0.5 pt **c)** Montrer que $y = \frac{3}{2}x$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O.

0.5 pt **4 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

0.5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x+1)]$ et en déduire que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

0.25 pt **c)** Montrer que la courbe (C) est au-dessous de la droite (D).

1.5 pt **5 -** Construire les deux droites (D) et (T) et la courbe (C).

(on rappelle que O est centre de symétrie de la courbe (C))

0.75 pt **6 - a)** Montrer que la fonction $H : x \mapsto x - \ln(\mathrm{e}^x + 1)$ est une fonction primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

0.5 pt **b)** En déduire que : $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x = \ln 4 - \ln 3$

0.5 pt **c)** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$.

FIN