ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2013

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

On considère dans un espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$ les points $A(-1;1;0)$, $B(1;0;1)$ et $\Omega(1;1;-1)$ et la sphère (S) de centre Ω et de rayon 3.

1 - a) Montrer que $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ et vérifier que $x+y-z=0$ est une équation cartésienne du plan (OAB). . **1 pt**

On a $\overrightarrow{OA}=(x_A-x_O)\vec{i}+(y_A-y_O)\vec{j}+(z_A-z_O)\vec{k}$ donc $\overrightarrow{OA}=(-1-0)\vec{i}+(1-0)\vec{j}+(0-0)\vec{k}$

D'où $\overrightarrow{OA}(-1,1,0)$

On a $\overrightarrow{OB}=(x_B-x_O)\vec{i}+(y_B-y_O)\vec{j}+(z_B-z_O)\vec{k}$ donc $\overrightarrow{OB}=(1-0)\vec{i}+(0-0)\vec{j}+(1-0)\vec{k}$

D'où $\overrightarrow{OB}(1,0,1)$

Donc $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{i}\text{ - }\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$

Donc $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=(1\times1-0\times0)\vec{i}-(-1\times1-1\times0)\vec{j}+(-1\times0-1\times1)\vec{k}$

D'où $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

Soit $M(x,y,z)$ un point $\in(ABC)$

On a $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normale à (OAB)

Donc (OAB) : $1x+1y-1z+d=O$ et puisque $O(0,0,0)\in(OAB)$ alors (OAB) : $1\times0+1\times-1\times+d=O$ donc $d=O$

D'où $(OAB):x+y-z=0$

b) Vérifier que $d(\Omega,(OAB))=\sqrt{3}$ puis montrer que le plan (OAB) coupe la sphère(S) suivant un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{6}$. **1 pt**

On a : $(OAB) : x+y-z=0$ et $\Omega(1,1;-1)$ donc :

$d(\Omega,(OAB)) = \dfrac{|1+1+(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

D'où $d(\Omega,(OAB)) = \sqrt{3}$

On a : $d(\Omega,(OAB)) = \sqrt{3}$ et $R = 3$ donc $d(\Omega,(OAB)) < R$ donc le plan (OAB) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $r = \sqrt{3^2 - \sqrt{3}^2} = \sqrt{9-3} = \sqrt{6}$

D'où le plan (OAB) coupe la sphère(S) suivant un cercle (Γ) de rayon $r = \sqrt{6}$.

2 - Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (OAB)

a) Démontrer que : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = -1-t \end{cases}$ $(t \in R)$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ). **0.5 pt**

On a (Δ) est perpendiculaire au plan (OAB) et On a $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normale à (OAB) donc $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite à (Δ)

On a (Δ) passe par $\Omega(1;1;-1)$ et Soit $M(x,y,z) \in (\Delta)$ donc

$$\begin{cases} x = x_\Omega + 1 \times t \\ y = y_\Omega + 1 \times t \\ z = z_\Omega + (-1) \times t \end{cases} \quad (t \in R)$$

D'où $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = -1-t \end{cases}$ $(t \in R)$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ)

b) Déterminer le triplet de coordonnées du centre du cercle (Γ) . **0.5 pt**

Soit H le centre du cercle (Γ) .

H est la projection orthogonale de (Ω) sur le plan (OAB)

$$M(x,y,a) \in (\Delta) \cap (OAB) \iff \begin{cases} x_H = 1+t \\ y_H = 1+t \\ z_H = -1-t \\ x_H + y_H - z_H = 0 \end{cases}$$

Donc $1+t+1+t-(-1-t) = 0$ donc $2+2t+1+t = 0$ donc $3+3t = 0$ donc $t = -1$

Donc $x_H = 1+(-1) = 0$, $y_H = 1+(-1) = 0$ et $z_H = -1-(-1) = 0$

D'où $O(0;0;0)$ est le centre du cercle (Γ)

Exercice 2 : (3 pts)

On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tel que : $a = 7+2i$, $b = 4+8i$ et $c = -2+5i$.

0.75 pt **1 - a)** Vérifier que : $(1+i)(-3+6i) = -9+3i$ et montrer que : $\dfrac{c-a}{b-a} = 1+i$.

On a : $(1+i)(-3+6i) = -3+6i-3i-6 = -9+3i$

On a : $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{-2+5i-(7+2i)}{4+8i-(7+2i)} = \dfrac{-2+5i-7-2i}{4+8i-7-2i} = \dfrac{-9+3i}{-3+6i}$

On a : $(1+i)(-3+6i) = -9+3i$ alors $\dfrac{-9+3i}{-3+6i} = 1+i$

D'où $\dfrac{c-a}{b-a} = 1+i$

1 pt **b)** En déduire que : $AC = AB\sqrt{2}$ et donner une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$.

On a : $\dfrac{c-a}{b-a} = 1+i$ donc $|\dfrac{c-a}{b-a}| = |1+i|$ donc $\dfrac{|c-a|}{|b-a|} = \sqrt{1^2+1^2}$

donc $\dfrac{AC}{AB} = \sqrt{2}$ donc $AC = AB\sqrt{2}$.

On a : $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv arg(\dfrac{c-a}{b-a})[2\pi]$

On a : $\dfrac{c-a}{b-a} = 1+i = \sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i) = \sqrt{2}(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i) = \sqrt{2}(\cos(\dfrac{\pi}{4}) + i\sin(\dfrac{\pi}{4}))$

donc $arg(\dfrac{c-a}{b-a}) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

D'où $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

2 - Soit R la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

0.75 pt **a)** Montrer que l'affixe du point D image du point A par la rotation R est : $d = 10+11i$.

On a $R(A) = D$ donc $d-b = (a-b)e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc $d = b+(a-b)i$ car $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ donc

$d = 4+8i+(7+2i-4-8i)i$ donc $d = 4+8i+i(3-6i)$ donc $d = 4+8i+3i+6$

D'où $d = 10+11i$

0.75 pt **b)** Calculer $\dfrac{d-c}{b-c}$ et en déduire que les points B, C et D sont alignés.

On a : $\dfrac{d-c}{b-c} = \dfrac{10+11i+2-5i}{4+8i+2-5i} = \dfrac{12+6i}{6+3i} = 2\times\dfrac{6+3i}{6+3i} = 2$

On a : $\dfrac{d-c}{b-c} = 2 \in R$ donc les points B, C et D sont alignés

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : cinq boules rouges, trois boules vertes et deux boules blanches.

On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.

1 - Soient les deux événements suivants :

A : « Tirer deux boules rouges et deux boules vertes »

B : « Aucune boule blanche parmi les quatre boules tirées »

1.5 pt

Montrer que : $P(A)=\frac{1}{7}$ et $P(B)=\frac{1}{3}$.

On tire au hasard et simultanément quatre boules de l'urne donc

$Card(\Omega)=C_{10}^{4}=\frac{10!}{4!(10-4)!}=210$

On a : $Card(A)=C_5^2\times C_3^2=\frac{5!}{2!(5-2)!}\times\frac{3!}{2!(3-2)!}=10\times 3=30$

D'où $P(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{30}{210}=\frac{1}{7}$.

On a : $Card(B)=C_8^4=\frac{8!}{4!(8-4)!}=70$

D'où $P(B)=\frac{Card(B)}{Card(\Omega)}=\frac{70}{210}=\frac{1}{3}$.

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches tirées.

0.25 pt

a) Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire Xsont :$0, 1$ et 2..

Parmi les quatre boules tirées, on peut avoir les cas suivants :

☐ Cas 1 : Aucune boule blanche tirée, donc X = 0.

☐ Cas 2 : Une seule boule blanche tirée, donc X = 1.

☐ Cas 3 : Deux boules blanches tirées, donc X = 2.

Et puisque la caisse contient seulement 2 boules blanches.

D'où les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2

1.25 pt

b) Montrer que $P(X=1)=\frac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

On a : $P(X=1)=\frac{C_2^1\times C_8^3}{210}=\frac{2\times 56}{210}=\frac{112}{210}=\frac{8}{15}$ D'où $P(X=1)=\frac{8}{15}$

On a : $P(X=0)=P(B)=\frac{1}{3}$ D'où $P(X=0)=\frac{1}{3}$

On a : $P(X=2)=\frac{C_2^2\times C_8^2}{210}=\frac{1\times 28}{210}=\frac{28}{210}=\frac{2}{15}$ D'où $.P(X=2)=\frac{2}{15}$

$X=k$	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

Exercice 4 : (3 pts)

Soit $(U_n)_{n\in N^*}$ la suite numérique définie par : $U_1=0$ et $U_{n+1}=\frac{25}{10-U_n}$ pour tout n de N^*.

1 - Vérifier que : $5-U_{n+1}=\frac{5(5-U_n)}{5+(5-U_n)}$ pour tout n de N^* et montrer par récurrence que $5-U_n>0$ pour tout n de N^*.

1 pt

On a : $5-U_{n+1}=5-\frac{25}{10-U_n}=\frac{5(10-U_n)-25}{10-U_n}=\frac{50-5U_n-25}{5+5-U_n}=\frac{25-5U_n}{5+(5-U_n)}$ donc

$5-U_{n+1}=\frac{5(5-U_n)}{5+(5-U_n)}$

D'où $5-U_{n+1}=\frac{5(5-U_n)}{5+(5-U_n)}$ pour tout n de N^* .

☐ Pour $n=1$ on a $5-u_1=5-0=5>0$ donc la propriété $(5-U_n>0)$ est vraie pour $n=1$.

☐ soit $n\in N^*$ supposons que $5-U_n>0$ et montrons que $5-U_{n+1}>0$.

☐ On a $5-U_n>0$ donc $5+(5-U_n)>5>0$ et $5(5-U_n)>0$ donc $\frac{5(5-U_n)}{5+(5-U_n)}>0$

D'où $5-U_{n+1}>0$.

D'après le principe de récurrence $5-U_n>0$ pour tout n de N^* .

2 - On considère la suite numérique $(V_n)_{n\in N^*}$ définie par :$V_n=\dfrac{5}{5-U_n}$ pour tout n de N^*.

a) Montrer que :$V_{n+1}=\dfrac{10-U_n}{5-U_n}$pour tout n de N^* et vérifier que :$V_{n+1}-V_n=1$ pour tout n de N^*. **0.75 pt**

On a : $V_{n+1}=\dfrac{5}{5-U_{n+1}}=\dfrac{5}{\frac{25-5U_n}{10-U_n}}=\dfrac{5(10-U_n)}{25-5U_n}=\dfrac{5(10-U_n)}{5(5-U_n)}=\dfrac{10-U_n}{5-U_n}$

D'où $V_{n+1}=\dfrac{10-U_n}{5-U_n}$ pour tout n de N^*..

On a : $V_{n+1}-V_n=\dfrac{10-U_n}{5-U_n}-\dfrac{5}{5-U_n}=\dfrac{10-U_n-5}{5-U_n}=\dfrac{5-U_n}{5-U_n}=1$

D'où $V_{n+1}-V_n=1$ pour tout n de N^*.

b) Montrer que : $V_n=n$ pour tout n de N^* et en déduire que :$U_n=5-\dfrac{5}{n}$ pour tout n de N^* . **1 pt**

On a : $V_{n+1}-V_n=1$ pour tout n de N^* donc (V_n) est une suite athématique de raison $r=1$ et de premier terme $V_1=\dfrac{5}{5-U_1}=\dfrac{5}{5-0}=1$ donc $V_n=V_1+(n-1)\times 1=1+n-1=n$

D'où $V_n=n$ pour tout n de N^* .

On a :$V_n=\dfrac{5}{5-U_n}$ pour tout n de N^* donc $5-U_n=\dfrac{5}{V_n}$ donc $U_n=5-\dfrac{5}{V_n}$

D'où $U_n=5-\dfrac{5}{n}$ pour tout n de N^*.

c) Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$. **0.25 pt**

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5}{n}=0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}U_n=5$

Exercice 5 : (8 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :$f(x)=(x-2)^2e^x$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : $1cm$)

1 - a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. **0.25 pt**

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ puis en déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction . **0.25 pt**

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-2)^2e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)^2\times\dfrac{e^x}{x}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

donc (C_f) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$de direction l'axe des ordonnées

0.25 pt **2 - a)** Vérifier que $f(x) = x^2e^x - 4xe^x + 4e^x$ pour tout x de R.

Soit $x \in R$.

0n a : $f(x) = (x-2)^2e^x = (x^2 - 4x + 4)e^x = x^2e^x - 4xe^x + 4e^x$

D'où $f(x) = x^2e^x - 4xe^x + 4e^x$ pour tout x de R.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et interpréter géométriquement ce résultat.

(On rappelle que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^ne^x = 0$ pour tout n de N^*)

0.25 pt

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x - 4xe^x + 4e^x$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} -4xe^x = \lim\limits_{x\to-\infty} 4e^x = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$.

0.25 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = x(x-1)e^x$ pour tout x de R .

Soit $x \in R$.

On a : $f'(x) = ((x-2)^2)'e^x + (x-2)^2(e^x)' = 2(x-2)'(x-2)^{2-1} + e^x(x-2)^2 =$

$2(x-2)e^x + (x-2)^2e^x = e^x(x-2)(2+x-2) = e^x(x-2)(x) = x(x-2)e^x$

D'où $f'(x) = x(x-1)e^x$ pour tout x de R

b) Montrer que la fonction f est croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty;0]$ et $[2;+\infty[$

0.25 pt et qu'elle est décroissante sur l'intervalle $[0;2]$.

On a $f'(x) = x(x-1)e^x$ et $e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ donc le signe de f' est celui de $x(x-1)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$			
$x-1$			$-$		0	$+$	
$x(x-1)$	$+$		0	$-$	0	$+$	

Donc $f'(x) \geq 0 \forall x \in]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$ et $f'(x) \leq 0 \forall x \in [0;2]$

D'où f est croissante sur $]-\infty;0]$ et sur $[2;+\infty[$ et décroissante sur $[0;2]$

0.25 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur R.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	O	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

4 - a) Montrer $f^{"}(x) = (x^2-2)e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que la courbe (C) possède deux points d'inflexions qu'on ne demande pas de déterminer leurs ordonnées. **0.25 pt**

Soit $x \in \mathbb{R}$.

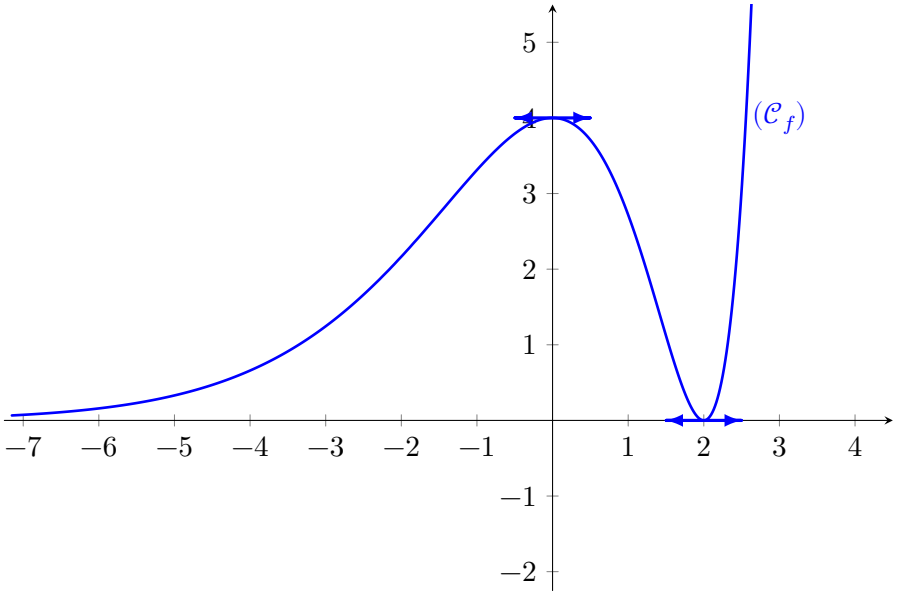
On a : $f^{'}(x) = x(x-2)e^x = (x^2-2x)e^x$ donc $f^{"}(x) = ((x^2-2x))^{'}e^x + (e^x)^{'}(x^2-2x)$ donc $f^{"}(x) = (2x-2)e^x + e^x(x^2-2x)$ donc $f^{"}(x) = e^x(2x-2+x^2-2x)$ donc $f^{"}(x) = (x^2-2)e^x$

D'où $f^{"}(x) = (x^2-2)e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

On a : $f^{"}(x) = 0 \iff x^2-2$ car $e^x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ donc $f^{"}(x) = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

D'où (C_f) admet deux points d'inflexions d'abscisses respectifs $x = -\sqrt{2}$ et $x = \sqrt{2}$

b) Construire (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ **0.25 pt**



5 - a) Montrer que la fonction $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur R puis calculer $\int_O^1 xe^x \, dx$. **0.25 pt**

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a : $H^{'}(x) = ((x-1)e^x)^{'} = (xe^x - x)^{'} = x^{'}e^x + x(e^x)^{'} - (e^x)^{'} = e^x + xe^x - e^x = xe^x$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, H^{'}(x) = h(x)$.

D'où $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$.

On a : $\int_O^1 xe^x \, dx = \int_O^1 h(x) \, dx = [H(x)]_0^1 = [(x-1)e^x]_0^1 = = ((1-1)e^1) - ((0-1)e^0) = 1$

D'où $\int_O^1 xe^x \, dx = 1$

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_O^1 x^2e^x \, dx = e-2$. **0.25 pt**

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On pose : $U(x) = x^2$ $\quad (U(x))^{'} = 2x$

$(V(x))^{'} = e^x$ $\quad V(x) = e^x$

Donc $\int_O^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x = [x^2e^x]_0^1 - \int_O^1 2xe^x\,\mathrm{d}x = (1^2e^1) - (0^2e^0) - 2\times 1 = e-2$.

D'où $\int_O^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x = e-2$

c) Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations$x=0$ et $x=1$ est égale à $5(e-2)cm^2$. **0.25 pt**

Soit A l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations$x=0$ et $x=1$.

On a :$A = (\int_O^1 f(x)\,\mathrm{d}x)cm^2$

On a : $\int_O^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_O^1 x^2e^x - 4xe^x + 4e^x\,\mathrm{d}x = \int_O^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x - 4\int_O^1 xe^x\,\mathrm{d}x + 4\int_O^1 e^x\,\mathrm{d}x = (e-2) - 4\times 1 + 4\,[e^x]_0^1 = e-2-4+4(e^1-e^0) = e-6+4(e-1) = e-6+4e-4 = 5e-10 = 5(e-2)$.

D'où $A = 5(e-2)cm^2$

6 - Utiliser la courbe pour donner le nombre de solutions de l'équation : $x^2 = e^{-x}+4x-4, x\in R$. **0.25 pt**

Soit $x\in\mathbb{R}$.

On a : $x^2 = e^{-x}+4x-4 \iff x^2-4x+4 = e^{-x} \iff e^x\times(x^2-4x+4) = e^x\times e^{-x} \iff f(x) = 1$.

Le nombre des solutions de l'équation $f(x)=1$ est égale aux nombre de point d'intersection entre la courbe (C_f) et la droite (D) d'équation $y=1$.

Or La droite (D) coupe la courbe (C_f) en 3 points donc L'équation $f(x)=1$ admet 3 solutions .

D'où l'équation : $x^2 = e^{-x}+4x-4$ admet 3 solutions sur $\mathbb{R}$

FIN