ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : RATTRAPAGE 2013

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

On considère, dans L'espace rapporté d un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. les points $A(0,0,1), B(1,1,1)$ et $C(2,1,2)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1,-1,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

0.75 pt

1 - • Montrons que $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$ est une équation cartésienne de la sphère
On a (S) est une sphère du centre Ω et de rayon $R=\sqrt{3}$ et soit $M(x,y,z)$ appartient à la sphère (S) alors :

$$\begin{aligned}\Omega M = R &\Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2\\ &\Leftrightarrow (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=\sqrt{3}^2\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+(z-0)^2=3\\ &\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1+z^2-3=0\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+2y+1+1-3=0\\ &\Leftrightarrow x^2++y^2+z^2-2x+2y-1=0\end{aligned}$$

Donc : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S)

• Vérifions que le point A appartient à la sphère (S). On a :

$$\begin{aligned}\Omega A &= \sqrt{(x_A-x_\Omega)^2+(y_A-y_\Omega)^2+(z_A-z_\Omega)^2}\\ &= \sqrt{(0-1)^2+(0-(-1))^2+(1-0)^2}\\ &= \sqrt{1+1+1}\\ &\sqrt{3}\end{aligned}$$

D'où : $\Omega A = R$ alors $A\in(S)$

0.75 pt

2 - a) • Montrons que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$
Comme $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ d'où $\overrightarrow{AB}(1-0;1-0;1-1)$ donc $\overrightarrow{AB}(1,1,0)$

Et $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A)$ d'où $\overrightarrow{AC}(2-0; 1-0; 2-1)$ donc $\overrightarrow{AC}(2,1,1)$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$
$$= (1 \times 1 \times 0)\vec{i} - (1 \times 1 - 2 \times 0)\vec{j} + (1 \times \times 1 - 2 \times 1)\vec{k}$$
$$= \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

Donc : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

- Déduisons que $x - y - z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
  On a : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normale au plan (ABC)
  Donc : $(ABC) : x - y - z + d = 0$
  Et puisque $A \in (ABC)$ donc $x_A - y_A - z_A + d = 0$
  D'où $0 - 0 - 1 + d = 0$ donc $d = 1$
  Finalement $x - y - z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0.75 pt **b)**

- Calculons $d(\Omega, (ABC))$

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|x_\Omega - y_\Omega - z_\Omega + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}}$$
$$= \frac{|1 - (-1) - 0 + 1|}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{3}}$$
$$= \sqrt{3}$$

Donc : $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{3}$

- Déduisons que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en A.
  On a : $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{3} = R$ et puisque $A \in (ABC)$ et $A \in (S)$
  Donc le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en A

3 - Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

0.25 pt **a)** Démontrer que $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = -t \end{cases} /(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) .

Soit $M(x, y, z) \in (\Delta)$ on a : $\Omega \in (\Delta)$ Et puisque la droite (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC) alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur à la droite (Δ) Par suite $\overrightarrow{\Omega M} = t.\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ avec $t \in \mathbb{R}$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x - 1 = t \\ y + 1 = -t \\ z - 0 = -t \end{cases} /(t \in \mathbb{R})$$

D'où $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = -t \end{cases} /(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de ladroite (Δ)

0.5 pt

b) Déduisons les coordonnées des deux points d'intersections de la droite (Δ) et la sphère (S)

Comme la droite (Δ) passante par Ω alors $d(\Omega,(\Delta))=0$

D'où la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points

On a $A\in(\Delta)$ et $A\in(S)$ donc A est un point d'intersection de (Δ) et (S)

Déterminons $H(x_H,y_H,z_H)$ le deuxième point d'intersection de (Δ) et (S)

$$\begin{cases} x_H=1+t \\ y_H=-1-t \\ z_H=-t \\ (x_H-1)^2+(y_H+1)^2+(z_H-0)^2-3=0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x_H=1+t \\ y_H=-1-t \\ z_H=-t \\ (1+t-1)^2+(-1-t+1)^2+(-t)^2-3=0 \end{cases}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} x_H=1+t \\ y_H=-1-t \\ z_H=-t \\ t^2+t^2+t^2-3=0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x_H=1+t \\ y_H=-1-t \\ z_H=-t \\ 3(t^2-1)=0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x_H=1+t \\ y_H=-1-t \\ z_H=-t \\ t=1 \text{ où } t=-1 \end{cases}$$

$$\text{On prend } t=1 \text{ Donc : } \begin{cases} x_H=1+1 \\ y_H=-1-1 \\ z_H=-1 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x_H=2 \\ y_H=-2 \\ z_H=-1 \end{cases}$$

Finalement A et $H(2,-2,-1)$ sont les point d'intersection de (Δ) et (S)

Exercice 2 : (3 pts)

0.75 pt

1 - Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes C, l'équation : $z^2-8z+25=0$

On a $\Delta=(-8)^2-4\times 25=64-100=-36$

Comme $\Delta<0$ alors $z_1=\dfrac{-(8)-i\sqrt{-\Delta}}{2}=\dfrac{8-i\sqrt{36}}{2}=4-3i$

Et $z_2=\bar{z_1}=4+3i$

Donc : $S = \{4-3i; 4+3i\}$

2 - On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tels que : $a = 4+3i$, $b = 4-3i$ et $c = 10+3i$ et la translation T de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

0,75 pt **a)** Montrons que l'affixe du point D image du point A par la translation T est $d = 10+9i$.

Soit D d'affixe d l'image du point A par la translation T

Donc : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

D'où $aff(\overrightarrow{AD}) = aff(\overrightarrow{BC})$

Donc : $d - a = (c - b)$

Donc : $d = (c - b) + a$

Alors : $d = 10 + 3i - (4 - 3i) + 4 + 3i$

Donc : $d = 10 + 3i - 4 + 3i + 4 + 3i$

Donc : $d = 10 + 3i$

Donc l'affixe du point D image du point A par la translation T est $d = 10+9i$

1 pt **b)** • Vérifions que $\dfrac{b-a}{d-a} = -\dfrac{1}{2}(1+i)$

$$\begin{aligned}\frac{b-a}{d-a} &= \frac{4-3i-(4+3i)}{10+9i-(4+3i)} \\ &= \frac{4-3i-4-3i}{10+9i-4-3i} \\ &= \frac{-6i}{6+6i} \\ &= -\frac{i}{1+i} \\ &= -\frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= -\frac{1+i)}{1^2+1^2} \\ &= -\frac{1}{2}(1+i)\end{aligned}$$

Donc : $\dfrac{b-a}{d-a} = -\dfrac{1}{2}(1+i)$

• Écrivons le nombre complexe $-\dfrac{1}{2}(1+i)$ sous une forme trigonométrique

On a $\left|-\frac{1}{2}(1+i)\right| = \frac{1}{2}|1+i| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(1+i) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)
\end{aligned}$$

Donc : $-\frac{1}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

0.5 pt **c)** Montrons que : $\overline{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})} \equiv \frac{5\pi}{4}[2\pi]$.

$$\begin{aligned}
\overline{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})} &\equiv arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right)[2\pi] \\
&\equiv arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right)\right)[2\pi] \\
&\equiv \frac{5\pi}{4}[2\pi]
\end{aligned}$$

Donc : $\overline{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})} \equiv \frac{5\pi}{4}[2\pi]$

Exercice 3 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 pt **1 -** Vérifions que : $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
(\text{Soit } n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - 1 &= \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - 1 \\
&= \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5} \\
&= \frac{1}{5}(u_n - 1)
\end{aligned}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$

0,5 pt **2 - a)** Montrons par récurrence que $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Pour $n = 0$ ona $u_0 = 2$ et $2 > 1$ d'où $u_0 > 1$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

Supposons que $u_n > 1$ pour n fixé de $\mathbb{N}$ et montrons que $u_{n+1} > 1$ c'est-à-dire montrons que : $u_{n+1} - 1 > 0$

On a d'après la question 1) $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$

Et puisque $u_n > 1$ alors $u_n - 1 > 0$

D'où $\frac{1}{5}(u_n - 1) > 0$ donc $u_{n+1} - 1 > 0$ d'où $u_{n+1} > 1$

D'après le raisonnement par récurrence on a $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **b)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

$$\begin{aligned}(\text{Soit } n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - u_n \\ &= \left(\frac{1}{5} - 1\right)u_n + \frac{4}{5} \\ &= -\frac{4}{5}u_n + \frac{4}{5} \\ &= \frac{4}{5}(1 - u_n)\end{aligned}$$

Et puisque $u_n - 1 > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$ donc $1 - u_n < 0$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\ u_{n+1} - u_n < 0$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

0,25 pt **c)** Déduisons que la suite (u_n) est convergente.

Comme la suite (u_n) est décroissante et aussi minorée par 1 $((\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 1)$

Alors la suite (u_n) est convergente.

3 - Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n$-1 pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **a)**

- Montrons que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$

  $\forall n \in \mathbb{N})$ on a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$ (question 1)

  Donc $\forall n \in \mathbb{N})\,;\ v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$

  Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$

- Exprimons v_n en fonction de n

  $(\forall n \in \mathbb{N})\quad v_n = v_0 \times q^{n-0} = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ car $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

  Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\quad v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$

0,5 pt **b)**

- Déduisons que $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

  On sait que : $v_n = u_n$-1 pour tout n de $\mathbb{N}$ d'où $u_n = v_n + 1$ et comme $v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$

  Donc : $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$

- Calculons la limite de la suite (u_n).

$\lim u_n = \lim \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1 = 1$

Car $-1 < \frac{1}{5} < 1$ c'est-à-dire $\lim \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

0,75 pt Donc $\lim u_n = 0$

Exercice 4 : (3 pts)

Un sac contient 9 jetons indiscernables au toucher : *quatre* jetons blancs, *trois* jetons noirs et *deux* jetons verts

On tire au hasard, simultanément, *trois* jetons du sac.

1 - Soient les deux événements suivants

A : " Tirer trois jetons de même couleur "

B : " Tirer trois jetons de couleurs différentes deux à deux "

1 pt Montrons que $P(A) = \frac{5}{84}$ et que $P(B) = \frac{2}{7}$

On considère l'univers Ω, Le tirage est simultané donc $card(\Omega) = C_9^3 = 84$t

jetons sont indiscernables au toucher signifie que $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$ et $P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)}$

$A : (B, B, B)$ où (N, N, N) d'où $card(A) = C_4^3 + C_3^3 = 5$ Donc : $P(A) = \frac{5)}{84}$

$B : (B, N, V)$ d'où $card(B) = C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ Donc : $P(B) = \frac{24)}{84} = \frac{2)}{7}$

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de jetons noirs tirés.

0.25 pt **a)** Vérifions que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1, 2 et 3.

Les boules tirées	La valeur de X
les trois boules sont $\bar{N}, \bar{N}, \bar{N}$	0
les trois boules sont $N, \bar{N}, \bar{N}$	1
les trois boules sont $N, N, \bar{N}$	2
les trois boules sont N, N, N	3

Donc : es valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1, 2 et 3

1 pt **b)** Montrons que $P(X = 2) = \frac{3}{14}$ et $P(X = 1) = \frac{15}{28}$

- Calculons $P(X = 2)$

On sait que : $(X = 2) : (N, N, \bar{N})$ donc $card(X = 2) = C_3^2 \times C_6^1 = 18$

Donc : $P(X = 2) = \frac{card(X = 2)}{card(\Omega)} = \frac{18}{84} = \frac{3}{14}$

-]Calculons $P(X=1)$

  $(X=1) : (N, \bar{N}, \bar{N})$ donc $card(X=1) = C_3^1 \times C_6^2 = 45$

  Donc : $P(X=1) = \dfrac{card(X=1)}{card(\Omega)} = \dfrac{45}{84} = \dfrac{15}{84}$

0.75 pt **c)** Déterminons la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

- Calculons $P(X=0)$

  On sait que : $(X=0) : (\bar{N}, \bar{N}, \bar{N})$ donc $card(X=0) = C_6^3 = 20$

  Donc : $P(X=0) = \dfrac{card(X=0)}{card(\Omega)} = \dfrac{20}{84} = \dfrac{5}{21}$

  Donc : $P(X=0) = \dfrac{5}{21}$

- $P(X=1) = \dfrac{15}{28}$
- $P(X=2) = \dfrac{3}{14}$
- Calculons $P(X=0)$

  On sait que : $(X=3) : (N, N, N)$ donc $card(X=3) = C_3^3 = 1$

  Donc : $P(X=3) = \dfrac{card(X=3)}{card(\Omega)} = \dfrac{1}{84}$

  Donc : $P(X=3) = \dfrac{1}{84}$

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$

$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$

Problème : (8 pts)

Partie I

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - x - \ln x$

0.25 pt **1 - a)** Vérifions que $2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

$(\forall x \in \mathbb{R})$ on a : $2(2x+1)(x-1) = 2x^2 - 2x + x - 1 = 2x^2 - x - 1$

Donc $2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

1 pt **b)**

- Montrons que $g'(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$

  On a $u :\to x^2 - x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ (restriction d'une fonction polynôme sur $]0, +\infty[$)

  Et $v : x \to \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ (fonction primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur

$]0,+\infty[$)

Donc $g = u - v$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$(\forall x \in]0,+\infty[\quad g'(x) =' (x) - v'(x)$

Donc $g'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x}$

Donc $g'(x) = \frac{2x^2-x-1}{x}$

Finalement : $(\forall x \in]0,+\infty[\quad g'(x) = \frac{2x^2-x-1}{x}$

- Déduisons que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$ et qu'elle est croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

On sait que le signe de $g'(x)$ sur $]0,+\infty[$ est le signe de $2x^2 - x - 1$

Étudions le signe de $2x^2 - x - 1$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x+1)(x-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2x+1) = 0 \text{ où } (x-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ où } x = 1$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'après tableau de signe en déduire que $g'(x) \leq 0$ pour tout x de l'intervalle $]0,1]$ et $g'(x) \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $]1,+\infty[$

Donc g est décroissante sur $]0,1[$ et croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$

0.5 pt

2 - Montrons que $g(x) \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$. (remarquer que $g(1) = 0$).

Comme g est décroissante sur $]0,1[$ et croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$

Alors g admet une valeur minimale absolue en 1

Donc : $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad g(x) \geq g(1)$

Donc : $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad g(x) \geq 0$

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 1 - (\ln x)^2$

et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$(unité 1 cm).

0.5 pt **1 - a)** Montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 - 1 = -1$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -(\ln x)^2 = -\infty$

Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - 1 - (\ln x)^2 = -\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

D'où (C) admet une asymptote verticale à droite de 0 d'équation $x = 0$

0.5 pt **b)**

- Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x^2 - 1 - (\ln x)^2 \\ &= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right) = 1$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

0.25 pt **c)** Déduisons que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Alors (C) admet une branche parabolique vers l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

1 pt **2 - a)** Montrons que : $f'(x) = 2\left(\frac{x^2 - \ln x}{x}\right)$ pour tout x de $]0, +\infty[$. On sait que $f_1 : x \to x^2 - 1$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ (restriction d'une fonction polynôme)

Et aussi la fonction $f_2 : x \to -(\ln x)^2$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

Donc $f = f_1 + f_2$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a $(\forall x \in]0,+\infty[)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= f_1'(x) + f_2'(x) \\ &= 2x - 2 \times \frac{\ln x}{x} \\ &= \frac{2x^2 - 2\ln x}{x} \\ &= 2\left(\frac{x^2 - \ln x}{x}\right) \end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad f'(x) = 2\left(\frac{x^2-\ln x}{x}\right)$

b) • Vérifions que $\frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - \ln x}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$ Soit $x \in]0,+\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{x} + 1 &= \frac{x^2 - x - \ln x}{x} + 1 \\ &= \frac{x^2 - x - \ln x + x}{x} \\ &= \frac{x^2 - \ln x}{x} \end{aligned}$$

Donc : $\frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - \ln x}{x}$

• Déduisons que la fonction f est croissante sur $]0,+\infty[$. On a $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad f'(x) = 2\left(\frac{g(x)}{x} + 1\right)$

Comme $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$

Alors $\frac{g(x)}{x} + 1 \geq 0$

0.75 pt D'où $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad f'(x) \geq 0$ donc : f est croissante sur $]0,+\infty[$.

0.5 pt **3 - a)** Montrons que $y = 2x - 2$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point $A(1,0)$.

$$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

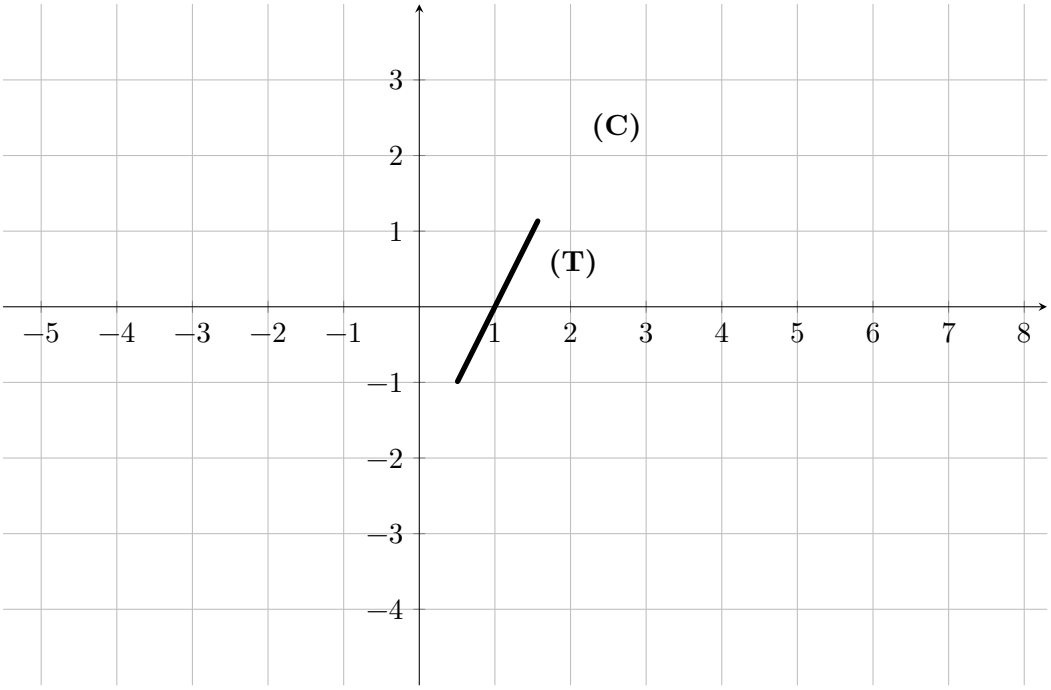
$$(T) : y = 2(x-1) + 0$$

$$(T) : y = 2x - 2$$

Car : $f'(1) = 2\left(\frac{1^2-\ln 1}{1}\right) = 2$ et $f(1) = 0$

Donc : $\boxed{(T) : y = 2x - 2}$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point $A(1, 0)$

0.75 pt **b)** Construisons, dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C). (on admettra que A est le seul point d'inflexion de la courbe (C))



0.75 pt **4 - a)**

- Vérifions que $H : x \mapsto x(\ln x - 1)$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$ On a H est dérivable sur $]0, +\infty[$ (comme le produit de deux fonction dérivables) et on a $\forall x \in]0, +\infty[$

  $H'(x) = 1(\ln x - 1) + x \times \frac{1}{x} = \ln x - 1 + 1 = \ln x = h(x)$

  $\boxed{\text{Donc : } H \text{ est une fonction primitive de la fonction } h \text{ sur }]0, +\infty[}$

- Montrons que : $\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\mathrm{d}x = 1$.

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\mathrm{d}x = [x(\ln(x) - 1)]_1^e$$

$$= e(\ln e - 1) - 1(\ln(1) - 1)$$

$$= 0 - (-1)$$

$$= 1$$

$\boxed{\text{Donc : } \int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\mathrm{d}x = 1}$

0.5 pt

b) Montrons, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2$

On pose : $\begin{cases} U(x) = (\ln x)^2 \\ V'(x) = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} U'(x) = 2\frac{\ln x}{x} \\ V(x) = x \end{cases}$

$$\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \mathrm{d}x = [x(\ln x)^2]_1^e - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2\ln(x)}{x} \times x \mathrm{d}x$$

$$= e\ln(e) - 1 \times \ln(1) - 2\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\mathrm{d}x$$

$$= e - 2$$

Car : $\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\mathrm{d}x = 1$

Donc : $\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2$

0.5 pt

c) Montrons que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ est égale à $\frac{1}{3}(\mathrm{e}^3 - 6\mathrm{e} + 8)\,\mathrm{cm}^2$

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ On sait que $\mathcal{A} = \int_1^{\mathrm{e}} |f(x)|\mathrm{d}x = \times u.m.s$ Comme f est croissante sur $]0, +\infty[$

Donc si $1 \leq x \leq e$ alors $f(1) \leq f(x) \leq f(e)$

Donc $0 \leq f(x) \leq e^2 - 2$ car $f(e) = e^2 - 1 - (\ln e)^2 = e^2 - 2$

Donc $\forall x \in [1, e]$ on a $f(x) \geq 0$ et $|f(x)| = f(x)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x = \times 1^2 cm^2 \\
&= \int_1^{\mathrm{e}} x^2 - 1 - (\ln x)^2 \mathrm{d}x = \times cm^2 \\
&= \int_1^{\mathrm{e}} x^2 - 1 \mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \mathrm{d}x.cm^2 \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^{e} - (e-2).cm^2 \\
&= \frac{e^3}{3} - e - (\frac{1^3}{3} - 1) - e + 2.cm^2 \\
&= \frac{e^3}{3} - 2e + \frac{8}{3}.cm^2 \\
&= \frac{1}{3}\left(e^3 - 6e + 8\right).cm^2
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A} = \frac{1}{3}\left(e^3 - 6e + 8\right).cm^2$