Exercice 1 — Session : NORMAL 2013 — 3 Pts

On considère dans le l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les points $A(-1,1,0)$, $B(1,0,1)$ et $\Omega(1,1,-1)$ et la sphère (S) de centre Ω et de rayon 3.

1 pt **1 - a)** Montrer que $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ et vérifier que $x+y-z=0$ est une équation cartésienne du plan (OAB)

1 pt **b)** Vérifier que $d(\Omega,(OAB))=\sqrt{3}$ puis montrer que le plan (OAB) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{6}$

2 - Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (OAB)

0,5 pt **a)** Démontrer que $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=-1-t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

0,5 pt **b)** Déterminer le triplet de coordonnées du centre du cercle (Γ)

Exercice 2 — Session : NORMAL 2013 — 3 Pts

On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A , B et C d'affixes respectives a , b et c tel que : $a=7+2i$; $b=4+8i$ et $c=-2+5i$

0,75 pt **1 - a)** Vérifier que : $(1+i)(-3+6i)=-9+3i$ et montrer que : $\dfrac{c-a}{b-a}=1+i$.

1 pt **b)** En déduire que : $AC=AB\sqrt{2}$ et donner une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

2 - Soit R la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

0,75 pt **a)** Montrer que l'affixe du point D image du point A par la rotation R est : $d=10+11i$.

0,5 pt **b)** Calculer $\dfrac{d-c}{b-c}$ et en déduire que les points B , C et D sont alignés.

Exercice 3 — Session : NORMAL 2013 — 3 Pts

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : cinq boules rouges, trois boules vertes et deux boules blanches.

On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.

1,5 pt **1 -** Soient les deux événements suivants :

A:" Tirer deux boules rouges et deux boules vertes"

B:"Aucune boule blanche parmi les quatre boules tirées"

Montrer que $p(A)=\dfrac{1}{7}$ et que $p(B)=\dfrac{1}{3}$

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches tirées.

0,25 pt **a)** Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1 et 2.

1,25 pt **b)** Montrer que $p(X=1)=\dfrac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 4 — Session : NORMAL 2013 — 3 Pts

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $u_1 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{25}{10-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1 pt **1 -** Vérifier que : $5 - u_{n+1} = \dfrac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et montrer par récurrence que $5 - u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

2 - On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $v_n = \dfrac{5}{5-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

0,75 pt **a)** Montrer que : $v_{n+1} = \dfrac{10-u_n}{5-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et vérifier que $v_{n+1} - v_n = 1$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1 pt **b)** Montrer que : $v_n = n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et en déduire que $u_n = 5 - \dfrac{5}{n}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

0,25 pt **c)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 5 — Session : NORMAL 2013 — 8 Pts

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)^2 e^x$.

et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : $1cm$)

0,25 pt **1 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ puis en déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction.

0,5 pt

0,25 pt **2 - a)** Vérifier que : $f(x) = x^2e^x - 4xe^x + 4e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et interpréter ce résultat.

(on rappelle que : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$)

0,75 pt **3 - a)** Montrer que : $f'(x) = x(x-2)e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

1 pt **b)** Montrer que la fonction f est croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty, 0]$ et $[2, +\infty[$ et qu'elle est décroissante sur l'intervalle $[0, 2]$.

0,5 pt **c)** Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1 pt **4 - a)** Montrer que : $f''(x) = (x^2-2)e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que la courbe (C) possède deux points d'inflexion qu'on ne demande pas de déterminer leurs ordonnées.

1 pt **b)** Construire (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0.5 pt **5 - a)** Montrer que la fonction $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $\int_0^1 xe^x dx$.

0.75 pt **b)** Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_0^1 x^2e^x dx = e - 2$

0.5 pt **c)** Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $5(e-2)cm^2$.

0.5 pt **d)** Utiliser la courbe pour donner le nombre de solution de l'équation :

$x^2 = e^{-x} + 4x - 4$, $x \in \mathbb{R}$

FIN