Exercice 1 — Session : NORMAL 2014 — 3 Pts

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé directe $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, les points $A(0,3,1)$, $B(-1,3,0)$ et $C(0,5,0)$ et la sphère (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2-4x-5=0$

0.75 pt **1 - a)** Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, et en déduire que les point A , B, et C ne sont pas alignés

0.5 pt **b)** Montrer que $2x-y-2z+5=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0.5 pt **2 - a)** Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(2,0,0)$ et son rayon est 3.

0.75 pt **b)** Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

0.5 pt **c)** Déterminer lese coordonnées de H point de contact du plan (ABC) et la sphère (S)

Exercice 2 — Session : NORMAL 2014 — 3 Pts

0.75 pt **1 -** Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - z\sqrt{2} + 2 = 0$

2 - On considère le nombre complexe : $u = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}i$

0.5 pt **a)** Montrer que le module du nombre u est $\sqrt{2}$, et que $arg u \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

0.75 pt **b)** En utilisant la forme trigonométrique du nombre u, montrer que u^6 est un nombre réel

3 - On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, les deux points A et B d'ffixes respectives a et b tel que : $a = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $b = 8$

Soit z l'affixe d'un point M du plan, et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

0.5 pt **a)** Exprimer z' en fonction de z

0.5 pt **b)** Vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation R, et en déduire que le triangle OAB est équilatéral

Exercice 3 — Session : NORMAL 2014 — 3 Pts

On considère la suite numérique (U_n) définie par : $U_0 = 13$ et $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n + 7\ \forall n \in \mathbb{N}$

0.75 pt **1 -** Montrer, par récurrence, que $U_n < 14$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - Soit (V_n) la suite numérique telle que ; $V_n = 14 - U_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 pt **a)** Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, puis exprimer V_n en fonction de n

0.75 pt **b)** En déduire que $U_n = 14 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$, puis calculer la limite de la suite (U_n)

0.5 pt **c)** Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $U_n > 13.99$

Exercice 4 — Session : NORMAL 2014 — 3 Pts

Un sac contient *neuf* jetons, indiscernables au toucher, et portants les nombres : $0,0,0,0,0,1,1,1,1$

1 - On tire au hasard, simultanément, *deux* jetons du sac.

Soit l'événement A : " La somme des nombres portés par les deux jetons tirés est égale à 1"

1 pt Montrer que $p(A) = \dfrac{5}{9}$

2 - On considère le jeu suivant : Saïd tire au hasard, simultanément, *deux* jetons du sac, et il est considéré gagnant s'il tire deux jetons portant chacun le nombre 1

1 pt **a)** Montrer que la probabilité pour que Saïd gagne est $\frac{1}{6}$

b) Saïd a joué le précédent jeu **trois** fois (**Il remet à chaque fois les deux jetons tirés dans le sac**)

1 pt Quelle est la probabilité pour que Saïd gagne exactement deux fois

Exercice 5 — Session : NORMAL 2014 — 8 Pts

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$

0.5 pt **1 -** Montrer que : $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$, et en déduire que la fonction g et croissante sur $]0;+\infty[$

0.75 pt **2 -** Vérifier que $g(1) = 0$, puis en déduire que $g(x) \leqslant 0$ pour tout x de $]0;1]$ et que $g(x) \geqslant 0$ pour tout x de $[1;+\infty[$

Partie II

On considéré la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = (1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$ et soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$(unité $1cm$)

0.5 pt **1 -** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$, et donner une interprétation géométrique du résultat

0.25 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

1 pt **b)** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(1+\ln x)^2}{x} = 0$ (on pourra poser : $t = \sqrt{x}$), puis montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

0.25 pt **c)** Déterminer la branche infinie de $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$

1.5 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$, puis en déduire que la fonction f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$

1 pt **b)** Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$, puis en déduire que $f(x) \geqslant 2$ pour tout x de $]0;+\infty[$

0.75 pt **4 -** Construire $(\mathcal{C})$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$(on admettra que la courbe $(\mathcal{C})$ possède un seul point d'inflexion que l'on ne demande pas de déterminer)

5 - On considère les deux intégrales suivantes : $I = \int_1^e (1+\ln x)dx$ et $J = \int_1^e (1+\ln x)^2 dx$

0.5 pt **a)** Montrer que $H : x \mapsto x\ln x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto 1+\ln x$ sur $]0;+\infty[$ puis en déduire que $I = e$

0.5 pt **b)** Montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que : $J = 2e - 1$

0.5 pt **c)** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses, et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

FIN