Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2014 — 3 Pts

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le point $A(0,0,1)$; le plan (P) d'équation $2x+y-2z-7=0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(0,3,-2)$ et de rayon 3 .

1 - a) Montrer que $\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=1-2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et perpendiculaire au plan (P). — **0,5 pt**

b) Vérifier que $H(2,1,-1)$ est le point d'intersection du plan (P) et la droite (Δ). — **0,5 pt**

2 - a) Montrer que $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=3(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})$ où $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$. — **0,75 pt**

b) Montrer que la distance du point Ω à la droite (Δ) est égale à 3. — **0,5 pt**

c) En déduire que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) et vérifier que H est le point de contact de la droite (Δ) et la sphère (S) — **0,75 pt**

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2014 — 3 Pts

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in N^*}$ définie par :

$$u_1=5 \quad\text{et}\quad u_{n+1}=\frac{5u_n-4}{1+u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

1 - Montrer par récurrence que $u_n>2$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. — **0,75 pt**

2 - On considère la suite numérique $(v_n)_{n\in N^*}$ définie par : $v_n=\dfrac{3}{u_n-2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $v_{n+1}=\dfrac{1+u_n}{u_n-2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique de raison 1. — **1 pt**

b) Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que : $u_n=2+\dfrac{3}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. — **0,75 pt**

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. — **0,5 pt**

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2014 — 3 Pts

Pour déterminer les deux questions d'un examen oral dans un concours de recrutement, le candidat tire au hasard, successivement et sans remise, deux cartes d'une urne contenant 10 cartes : huit cartes concernant les mathématiques et deux cartes concernant la langue française (on suppose que les cartes sont indiscernables au toucher).

1 - On considère l'événement A :" Tirer deux cartes concernant la langue française "
et l'événement B :"Tirer deux cartes concernant deux matières différentes "
Montrer que $p(A)=\dfrac{1}{45}$ et que $p(B)=\dfrac{16}{45}$ — **1,5 pt**

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de cartes tirées concernant la langue française.

a) Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : $0,1$ et 2 — **0,25 pt**

b) Montrer que $p(X=0)=\dfrac{28}{45}$ puis donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X — **1,25 pt**

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2014 — 3 Pts

0,75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 4z + 5 = 0$.

2 - On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les points A, B, C, D et Ω d'affixes respectives : $a = 2 + i$, $b = 2 - i$, $c = i$, $d = -i$ et $\omega = 1$

0,25 pt **a)** Montrer que : $\dfrac{a - \omega}{b - \omega} = i$.

0,5 pt **b)** En déduire que le triangle ΩAB est rectangle et isocèle en Ω.

3 - Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

0,5 pt **a)** Montrer que : $z' = iz + 1 - i$.

0,5 pt **b)** Vérifier que : $R(A) = C$ et $R(D) = B$.

0,5 pt **c)** Montrer que les points A, B, C et D appartiennent au même cercle dont on déterminera le centre.

Exercice 5 — Session : RATTRAPAGE 2014 — 8 Pts

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (xe^x - 1)\,e^x$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 2 cm).

0,75 pt **1 -** Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

0,75 pt **2 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

0.5 pt **b)** En déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction.

1 pt **3 - a)** Montrer que : $f'(x) = e^x\,(e^x - 1 + 2xe^x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis vérifier que $f'(0) = 0$.

0,5 pt **b)** Montrer que $e^x - 1 \geq 0$ pour tout x de $[0, +\infty[$ et que $e^x - 1 \leq 0$ pour tout x de $]-\infty, 0]$.

c) Montrer que la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$ et qu'elle est décroissante sur $]-\infty, 0]$

1,25 pt puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4 - a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0, +\infty[$

0,75 pt et que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$. (on admettra que $\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} < 1$)

b) Construire dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe (C), (on admettra que la courbe (C) possède

0,75 pt un seul point d'inflexion qu'on ne demande pas de déterminer).

0,75 pt **5 -** Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx = \frac{1}{4}$$

1 pt **6 -** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$.

FIN