ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Normal 1 2015

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

0.5 pt

1 - Soit le plan (P) passant par le point A et $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ est vecteur normal à (P). Montrer que : $x + y - z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P).

$*$ 1ère Méthode :

On a le vecteur $\vec{u} = \vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ est un vecteur normal au plan (P) passant par le point $A(2, 1, 0)$.

$D'o\grave{u}$: $M(x; y; z) \in (P) \iff \overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff 1 \times (x-2) + 1 \times (y-1) + (-1) \times z = 0$$

$$\iff x - 2 + y - 1 - z = 0$$

$$\iff x + y - z - 3 = 0$$

Donc : $x + y - z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du pan (P).

$*$ 2ème Méthode :

Le vecteur $\vec{u}(1; 1; -1)$ est un vecteur normal au plan (P).

donc une équation cartésienne du plan (P) est de la forme $x + y - z + d = 0$

sachant que le point $A(2; 1; 0) \in (P)$ d'où : $x_A + y_A - z_A + d = 0$ par suite $d = -3$

Donc : $x + y - z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du pan (P).

0.75 pt

2 - Soit (S) l'ensemble des points M de l'espace qui vérifie la relation : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ Montrons que (S) est une sphère de centre $\Omega(-1; 1; 0)$ et de rayon 3

On a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+4 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff (x-2)(x+4) + (y-1)(y-1) + z^2 = 0$$

$$\iff x^2 + 2x - 8 + (y-1)^2 + z^2 = 0$$

$$\iff \underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(x+1)^2} - 9 + (y-1)^2 + z^2 = 0$$

$$\iff (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 = 9 = 3^2$$

Donc : la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(-1;1;0)$ et de rayon $R = 3$

0,5 pt **3 - a) Calculer la distance du point Ω au plan (P) et en déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C)**

$*$ Calculer $d(\Omega,(P))$:

On a : $d(\Omega,(P)) = \dfrac{|x_\Omega + y_\Omega - z_\Omega - 3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \dfrac{|1\times(-1)+1\times 1+(-1)\times 0-3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \sqrt{3}$

Donc : $d(\Omega,(P)) = \sqrt{3}$

$*$ Déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle :

Puisque le rayon du sphère est $R = 3$ et on a : $d(\Omega,(P)) = \sqrt{3} < 3$ d'où le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C).

0.5 pt **b) Montrer que le centre du cercle (C) est le point $H(0;2;-1)$**

On a le centre du cercle (C) est la projection orthogonale de Ω centre de la sphère (S) sur le plan (P) ou bien l'intersection du plan (P) et la droite (Δ) passant par le centre Ω et orthogonale au plan (P) Donc :

- La droite (Δ) est orthogonale au plan (P).
- Le vecteur $\vec{u}\,(1;1;-1)$ est un vecteur normal du plan (P).

Donc : $\vec{u}\,(1;1;-1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) et on a $\Omega\,(-1,1,0) \in (\Delta)$

Par conséquence une représentation paramétrique de le droite (Δ) est :

$$(\Delta): \begin{cases} x &= -1 + 1\times t = -1 + t \\ y &= 1 + 1\times t = 1 + t \\ z &= 0 + (-1)\times t = -t \end{cases} \quad ; \quad (t \in \mathbb{R})$$

On détermine les coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (P).

$$M(x;y;z)\in(P)\cap(\Delta) \iff \begin{cases} M\in(P) \\ M\in(\Delta) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y-z-3=0 \\ \begin{cases} x &= -1+t \\ y &= 1+t \\ z &= -t \end{cases} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (-1+t)+(1+t)-(-t)-3=0 \\ \begin{cases} x &= -1+t \\ y &= 1+t \\ z &= -t \end{cases} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3t-3=0 \\ \begin{cases} x &= -1+t \\ y &= 1+t \\ z &= -t \end{cases} \end{cases}$$

D'où : $t=1$ et $\begin{cases} x &= -1+1=0 \\ y &= 1+1=2 \\ z &= -1=-1 \end{cases}$

Donc : l'intersection de le droite (Δ) et le plan (P) est le point $H(0;2;-1)$

Alors le centre de cercle (C) est le point $H(0;2;-1)$

0.75 pt **4 - Montrer que : $\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$, en déduire la surface du triangle OHB**

∗ Montrer que : $\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$

On a : $\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}$

$$D'o: \quad \overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$$

Donc : $\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$

∗ En déduire S_{OHB} la surface du triangle OHB

La surface est donnée par la formule suivante :

$S_{OHB}=\frac{1}{2}\times\|\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}\|=\frac{1}{2}\|\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}\|=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+4^2+8^2}=\frac{1}{2}\sqrt{81}$

Donc : $S_{OHB}=\frac{9}{2}$ u.a (Unité d'aire)

Exercice 2 : (3 pts)

Partie I

On considère le nombre complexe a tel que : $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

0.5 pt **1 - Montrer que le module de a est $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$**

On a : $$\begin{aligned} |a| &= \left|2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}\right| \\ &= \sqrt{(2+\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}^2} \\ &= \sqrt{(4 + 4\sqrt{2} + 2) + 2} \\ &= \sqrt{8 + 4\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{4(2+\sqrt{2})} \\ &= 2\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Donc : $|a| = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

0.25 pt **2 - Vérifier que : $a = 2\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + 2i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$**

On a : $$\begin{aligned} 2\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + 2i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 2\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ &= a \end{aligned}$$

0.25 pt **3 - a) Par la linéarisation de $\cos^2\theta$ tel que θ est un nombre réel, montrer que : $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$**

D'après la **Formule d'Euler**, on a : $$\begin{aligned} \cos^2\theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\left(e^{i\theta}\right)^2 + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + \left(e^{-i\theta}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2i\theta} + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2i\theta} + 2e^{i\theta-i\theta} + e^{-2i\theta}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\underbrace{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}_{2\cos(2\theta)} + 2e^0\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2\cos(2\theta) + 2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos(2\theta) + 1\right) \end{aligned}$$

Donc : $\cos^2\theta = \frac{1}{2}\left(\cos(2\theta) + 1\right)$. Alors : $1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta$

0.5 pt **b) Montrer que : $a = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 4i\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$**

(On rappelle que : $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$)

On a $$\begin{aligned} a &= 2\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + 2i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2\left(1 + \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)\right) + 2i\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) \\ &= 2\left(2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) + 2i\left(2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ &= 4\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 4i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{aligned}$$

Donc : $a = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 4i\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

0.5 pt

c) Montrer que : $4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$ est la forme trigonométrique du nombre a puis montrer que : $a^4 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i$

$*$ Montrer que : $4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$ est la forme trigonométrique du nombre a

$$\begin{aligned} \text{On a} \quad a &= 4\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 4i\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ &= 4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right] \end{aligned}$$

D'autre part : $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ d'où : $|a| = 4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Donc : $4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$ est la forme trigonométrique du nombre a.

$*$ montrer que : $a^4 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i$

On a : $a = 4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$

D'après les questions précédentes on a : $|a| = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $|a| = 4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Donc : $2\sqrt{2+\sqrt{2}} = 4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$

$$\begin{aligned} a^4 &= \left(4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]\right)^4 \\ &= \left(4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^4\left[\cos\left(4\times\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(4\times\frac{\pi}{8}\right)\right] \\ &= \left(4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^4\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= \left(4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^4 i = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i \end{aligned}$$

Donc : $a^4 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i$

Partie II

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points Ω et A d'affixes respectives ω et a tel que : $\omega = \sqrt{2}$ et $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

0.5 pt

1 - Montrer que l'affixe b du point B l'image du point A par la rotation R est égale à $2i$

L'écriture complexe de la rotation R est de la forme : $z' - \omega = (z-\omega)\,e^{i\theta}$

D'où : $z' - \sqrt{2} = \left(z - \sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}$

Donc : $z' - \sqrt{2} = \left(z - \sqrt{2}\right) \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$z' = \left(z - \sqrt{2}\right) \times i + \sqrt{2}$; $\left(\text{car : } \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\right)$

$z' = iz - i\sqrt{2} + \sqrt{2}$

D'où : L'écriture complexe de la rotation R est $z' = iz - i\sqrt{2} + \sqrt{2}$

On pose que le point B d'affixe b' est l'image du point A par la rotation R.

On prouve que $b' = b = 2i$

$$\begin{aligned} R(A) = B &\iff b' = ia - i\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ &\iff b' = i\left(2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) - i\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ &\iff b' = 2i + i\sqrt{2} - \sqrt{2} - i\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ &\iff b' = 2i \end{aligned}$$

D'où : $b' = b = 2i$

0.5 pt **2 - Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z qui vérifie $|z-2i|=2$**

On a : $|z-2i|=2 \iff |z-b|=2$

$\iff BM=2$

D'où : l'ensemble des points M d'affixe z qui vérifie $|z-2i|=2$ est le cercle de centre le point B et de rayon 2.

Exercice 3 : (3 pts)

2 pt **1 - On considère l'expérience suivante : On tire au hasard et simultanément trois de boules de l'urne U_1**

Soient les événements suivants :

♣ A : **" On obtient une seule boule rouge et deux boules vertes "**

♣ B : **" On obtient trois boules de même couleur "**

Montrer que : $p(A)=\frac{12}{35}$ **et** $p(B)=\frac{1}{7}$

∗ Montrons que : $p(A)=\frac{12}{35}$

• On calcule $CardΩ$: (le nombre des tirages possible)

Tirer simultanément trois boules parmi les sept boules de l'urne U_1 présente une combinaison de 3 parmi 7

D'où le nombres de tirages possibles est : $CardΩ=C_7^3=\frac{A_7^3}{3!}=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

• On calcule $CardA$: (le nombre des tirages qui réalisent l'événement A)

L'événement A : " On obtient une seule boule rouge et deux boules vertes "

Tirées une boules rouges parmi 4 boules rouges de l'urne U_1 il se fait par $C_4^1=4$ façons différentes ;

Tirées deux boules vertes parmi 3 boules vertes de l'urne U_1 il se fait par $C_3^2=3$ façons différentes.

Donc le nombre de tirages qui réalise l'événement A est : $C_4^1\times C_3^2=4\times3=12$

Donc : $cardA=C_4^1\times C_3^2=12$

Alors : $p(A)=\frac{cardA}{cardΩ}=\frac{C_4^1\times C_3^2}{C_73}=\frac{4\times3}{35}=\frac{12}{35}$

∗ Montrons que : $p(B)=\frac{1}{7}$

On calcule $CardB$: (le nombre des tirages qui réalisent l'événement B)

L'événement B : " On obtient trois boules de même couleur "

ou encoure l'événement B est " les 3 boules tirées sont vertes ou les 3 boules tirées sont rouges "

Les 3 boules tirées simultanément sont vertes parmi 3 boules vertes de l'urne U_1 on a : $C_3^3=1$

Les 3 boules tirées simultanément sont rouges parmi 4 boules rouges de l'urne U_1 on a : $C_4^3=4$

D'où : $cardB=C_3^3+C_4^3=1+4=5$

Donc : $p(B)=\frac{cardB}{cardΩ}=\frac{C_3^3+C_4^3}{C_73}=\frac{1+4}{35}=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$

1 pt **2 - On considère l'expérience suivante : On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne U_1 puis on tire une boule de l'urne U_2.**

Soit l'évènement C : " On obtient trois boules rouges ". Montrer que : $p(C)=\frac{6}{35}$

∗ On calcule $cardΩ'$ (car on a une autre expérience)

• On tire simultanément deux boules parmi 7 boules de l'urne U_1 il se fait par $C_7^2=21$ façons

différentes.

• On tire une boule de l'urne U_2 il se fait par $C_5^1 = 5$ façons différentes.

Donc : $card\Omega' = C_7^2 \times C_5^1 = 21 \times 5 = 105$

∗ On calcule $cardC$: (le nombre des tirages qui réalisent l'événement C)

Soit l'évènement C : " On obtient trois boules rouges " ou encoure " on tire simultanément deux boules rouges de l'urne U_1 et une boule rouge de l'urne U_2 "

• On tire simultanément deux boules rouges parmi 4 boules rouges de l'urne U_1 il se fait par $C_4^2 = 6$ façons différentes.

• On tire une boule rouge parmi 3 boules rouges de l'urne U_2 il se fait par $C_3^1 = 3$ façons différentes.

Donc : $p(C) = \dfrac{cardC}{card\Omega'} = \dfrac{C_4^2 \times C_3^1}{C_7^2 \times C_5^1} = \dfrac{6 \times 3}{105} = \dfrac{6}{35}$

Exercice 4 : (11 pts)

Partie I

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x(1-\ln x)}$

0,5 pt **1 - Montrer que : $D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$**

On a : $x \in D_f \iff (x > 0 \quad et \quad x(1-\ln x) \neq 0)$

$\iff x > 0 \quad et \quad x \neq 0 \quad et \quad 1 - \ln x \neq 0$

$\iff x > 0 \quad et \quad \ln x \neq \ln e$

$\iff x > 0 \quad et \quad x \neq e$

$\iff x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$

Donc : $D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$

0,75 pt **2 - a) Calculer : $\lim\limits_{x \to e^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to e^-} f(x)$ puis interpréter géométriquement ces deux résultats**

∗ Calculer : $\lim\limits_{x \to e^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to e^-} f(x)$

On détermine le signe de $1 - \ln x$:

On a : $1 - \ln x \geq 0 \iff 1 \geq \ln x$

$\iff \ln e \geq \ln x$

$\iff e \geq x$

x	0		e		$+\infty$
$1-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	

• $\lim\limits_{x \to e^+} f(x) = \lim\limits_{x \to e^+} \dfrac{1}{x(1-\ln x)} = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to e^+} 1 - \ln x = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to e^+} x = e$

• $\lim\limits_{x \to e^-} f(x) = \lim\limits_{x \to e^-} \dfrac{1}{x(1-\ln x)} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to e^-} 1 - \ln x = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to e^-} x = e$

∗ Interpréter géométriquement ces deux résultats :

On a : $\lim\limits_{x \to e^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to e^-} f(x) = +\infty$

D'où la droite (D) d'équation $x = e$ est une asymptote verticale à C_f.

0,5 pt **b) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis en déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera sa direction.**

∗ Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x(1-\ln x)} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \ln x = -\infty$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

∗ Interpréter géométriquement ce résultat :

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

D'où la courbe (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $+\infty$

0,5 pt **c) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat**

∗ Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x(1-\ln x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x-x\ln x}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x=0^-$ et $\lim\limits_{x\to0^+} -x\ln x=0^+$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x=0^+$

∗ Interpréter géométriquement ce résultat :

On a $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

D'où la courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$

0,75 pt **3 - a) Montrer que : $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ pour tout x de D_f**

On a la fonction f est dérivable sur D_f car elle est le produit et quotient de plusieurs fonctions dérivables sur D_f

On a : $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x(1-\ln x)}\right)'$

$=\dfrac{-(x(1-\ln x))'}{(x(1-\ln x))^2}$

$=-\dfrac{1-\ln x+x\times(-\frac{1}{x})}{(x(1-\ln x))^2}$

$=-\dfrac{-\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$

Donc : $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ pour tout x de D_f

1 pt **b) Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,\mathrm{e}[$ *et sur* $]\mathrm{e},+\infty[$**

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $\ln x$ sur D_f.

• Sachant que : $\ln x\leq 0$ sur l'intervalle $]0,1]$ donc $f'(x)\leq 0$ d'où f est strictement décroissante sur $]0,1]$.

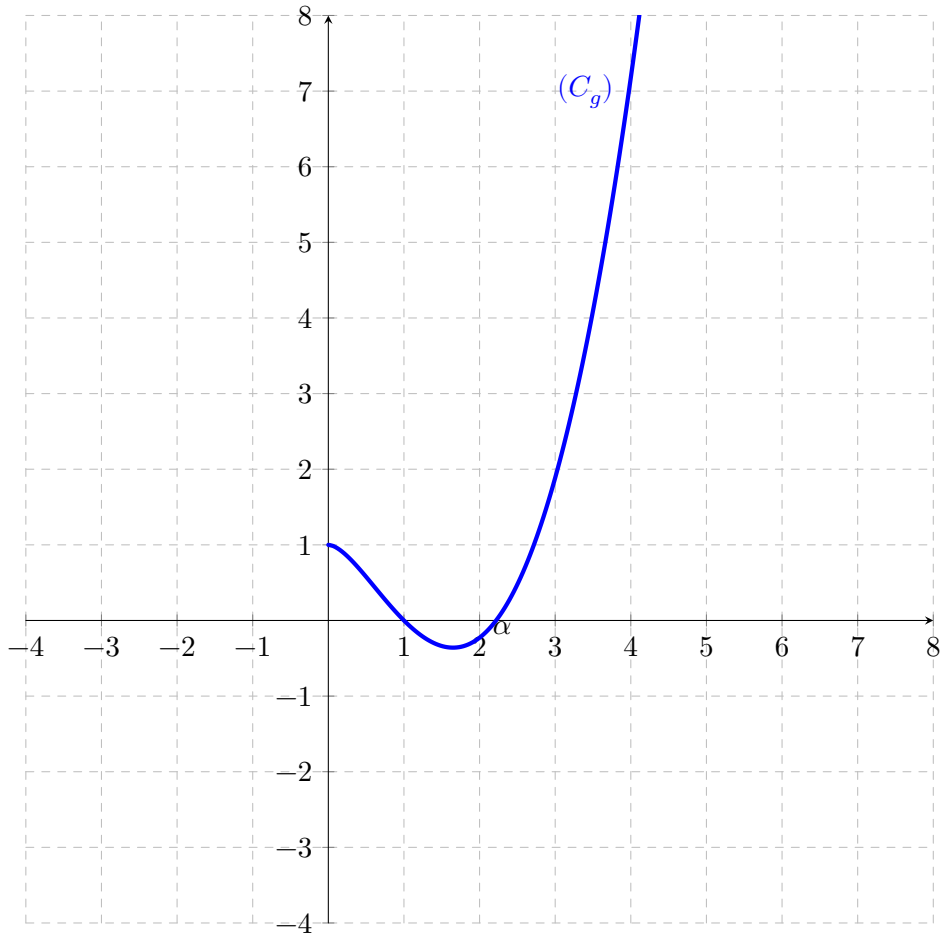
• Sachant que : $\ln x\geq 0$ sur l'intervalle $[1,+\infty[$ donc $f'(x)\geq 0$ sur chacun des intervalles $[1,\mathrm{e}[$ et $]\mathrm{e},+\infty[$ d'où f est strictement croissante sur chacun des intervalles $[1,\mathrm{e}[$ et $]\mathrm{e},+\infty[$.

0,25 pt **c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f**

x	0		1		e		$+\infty$
f'	‖	−	0	+	‖	+	
f	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

Partie II

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=1-x^2(1-\ln x)$. Et soit (C_g) est la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (voir la figure)



0,5 pt **1 - a) Déterminer graphiquement le nombre des solutions de l'équation suivante :**

(E) : $g(x) = 0$; $x \in]0;+\infty[$

On cherche l'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses, graphiquement le nombre des points d'intersection est 2.

Donc : l'équation (E) a deux solutions.

0,5 pt **b) On donne le tableau des valeurs suivantes :**

x	2,1	2,2	2,3	2,4
g(x)	-0,14	-0,02	0,12	0,28

Montrer que l'équation (E) admet une solution α tel que : $2,2 < \alpha < 2,3$

- Graphiquement la fonction g est continue sur l'intervalle $[2,2;2,3]$.
- D'après le tableau : $g(2,2) \times g(2,3) = -0,02 \times 0,12 < 0$.
- En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel α de $]2,2;2,3[$ tel que : $g(\alpha) = 0$

Donc : l'équation (E) admet une solution α tel que : $2,2 < \alpha < 2,3$

0,25 pt **2 - a) Vérifier que : $f(x) - x = \dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ pour tout x de D_f**

On a : $f(x)-x = \dfrac{1}{x(1-\ln x)} - x$

$= \dfrac{1-x^2(1-\ln x)}{x(1-\ln x)}$

$= \dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$

Donc : $f(x)-x = \dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ pour tout x de D_f

0,5 pt **b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ coupe la courbe (C_f) en deux points d'abscisses respectives 1 et α.**

On étudie l'intersection de la courbe (C_f) et la droite d'équation $y=x$, pour cela on résout l'équation : $f(x)=x$ pour tout $x \in D_f$

$(\forall x \in D_f)$; $f(x)=x \iff f(x)-x=0$

$\iff \dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$

$\iff g(x)=0$

Graphiquement on a deux solutions et d'après ce qui précède $g(\alpha)=0$ et $g(1)=0$.

Donc : La droite (Δ) d'équation : $y=x$ coupe la courbe (C_f) en deux points respectives d'abscisses 1 et α.

0,5 pt **c) A partir de la courbe (C_g), déterminer le signe de g sur $[1;\alpha]$ et montrer que $f(x)-x \leq 0$ pour tout x de $[1;\alpha]$**

$*$ Déterminer le signe de g sur $[1;\alpha]$:

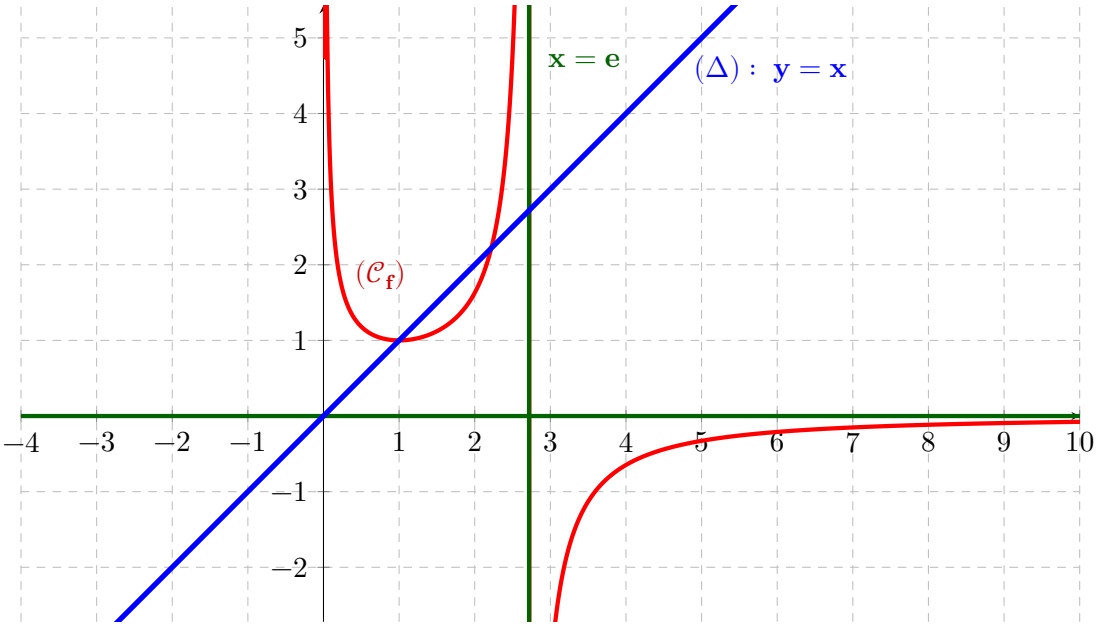
Sur l'intervalle $[1;\alpha]$: on a la courbe (C_g) est au-dessous de l'axe des abscisses, d'où $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in [1;\alpha]$

$*$ Montrer que $f(x)-x \leq 0$ pour tout x de $[1;\alpha]$

Sur l'intervalle $[1;\alpha]$ on a $g(x) \leq 0$ et $f(x) = \dfrac{1}{x(1-\ln x)} \geq 1 > 0$ (d'après tableau de variations de la fonction f sur $[1;e[$) et on a : $[1;\alpha] \subset [1;e[$

d'où : $f(x)-x = \dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)} = \overbrace{\dfrac{1}{x(1-\ln x)}}^{f(x)>0} \times g(x) \leq 0$ pour tout x de $[1;\alpha]$

1,25 pt **3 - Construire dans le même repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe (C_f) et la droite (Δ)**



0,75 pt

a) Montrer que : $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx = \ln 2$

(remarquer que $\frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$ **pour tout** x **de** D_f**)**

On a :

$$\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx &= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}\,dx \\
&= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{-(1-\ln x)'}{(1-\ln x)}\,dx \\
&= -\Big[\ln|1-\ln x|\Big]_1^{\sqrt{e}} \\
&= -\left(\left(\ln|1-\ln\sqrt{e}|\right) - \left(\ln|1-\ln 1|\right)\right) \ ; \ \left(\ln|1-\ln\sqrt{e}| = \ln|1-\frac{1}{2}\ln e|\right) \\
&= -\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln 1\right) \ ; \ \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2\right) \\
&= \ln 2
\end{aligned}$$

Donc : $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx = \ln 2$

0,75 pt

b) Calculer en cm^2 **l'aire du domaine plan délimité par la courbe** (C_f) **et la droite** (Δ) **et les droites d'équations** $x = 1$ **et** $x = \sqrt{e}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \left(\int_1^{\sqrt{e}} |f(x)-x|\,dx\right) \times u.a \quad avec \quad u.a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = 4\ cm^2 \\
&= \left(\int_1^{\sqrt{e}} (x-f(x)\,dx\right) \times 4cm^2 \quad (\text{Car } (C_f) \text{ est au-dessous de } (\Delta) \text{ sur } [1;\sqrt{e}]) \\
&= 4\int_1^{\sqrt{e}} \left(x - \frac{1}{x(1-\ln x)}\right) dx\ cm^2 \\
&= 4\left(\int_1^{\sqrt{e}} x\,dx - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx\right) cm^2 \\
&= 4\int_1^{\sqrt{e}} x\,dx - 4\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx\ cm^2 \\
&= 4\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{\sqrt{e}} - 4\ln 2\ cm^2 \\
&= 2\left(\sqrt{e}^2 - 1^2\right) - 4\ln 2\ cm^2 \\
&= -4\ln 2 + 2e - 2\ cm^2
\end{aligned}$$

Donc : $\mathcal{A} = -4\ln 2 + 2e - 2\ cm^2$

Partie III

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 pt **1 - Montrer par récurrence que : $1 \leq u_n \leq \alpha$ (1) pour tout n de $\mathbb{N}$**

• On vérifie que la relation est vraie pour $n = 0$

On a : $1 \leq u_0 = 2 \leq \alpha$ (avec : $2,2 < \alpha < 2,3$) d'où la relation (1) est vrais pour $n = 0$

• On suppose que la relation (1) est vraie pour n (hypothèse se récurrence)

• On montre que la relation (1) est vraie pour $n+1$ c-à-d : $1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$

D'après l'hypothèse de récurrence on a : $1 \leq u_n \leq \alpha$

Donc : $1 \leq u_n \leq \alpha \implies f(1) \leq u_n \leq f(\alpha)$ (car la fonction f est croissante sur $[1;\alpha]$)

$\implies 1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$

D'où : la relation est vraie pour $n+1$

Donc : $1 \leq u_n \leq \alpha$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 pt **2 - Montrer que la suite (u_n) est décroissante.**

(On pourra utiliser le résultat de la question $II.2.c$)

Pour cela on montre que : $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (ou encoure : $u_{n+1} - u_n \leq 0$)

Soit n de $\mathbb{N}$, on pose : $x = u_n$ et on a $u_n \in [1;\alpha]$ car $1 \leq u_n \leq \alpha$

D'après le résultat de la question $II.2.c$ on a : $f(x) - x \leq 0$ pour tout x de $[1;\alpha]$

Donc : $f(x) \leq x$ pour tout x de $[1;\alpha]$

D'où : $x \in [1;\alpha] \implies f(x) \leq x$

$\implies f(u_n) \leq u_n$

$\implies u_{n+1} \leq u_n$

Donc : la suite (u_n) est décroissante.

0,75 pt **3 - En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.**

$*$ En déduire que la suite (u_n) est convergente :

On a :

• La suite (u_n) est décroissante ;

• La suite (u_n) est minorée par 1.

Donc la suite (u_n) est convergente.

$*$ On détermine sa limite l :

• La fonction f est continue sur $I = [1;\alpha]$ et $f(I) = f([1;\alpha]) = [f(1);f(\alpha)] = [1;\alpha] \subset [1;\alpha]$

• On a $u_0 = 2 \in [1;\alpha]$

• La suite (u_n) est convergente vers l avec $l \in \mathbb{R}$

Donc l est solution de l'équation : $f(x) = x$

On a $f(x) = x \Longleftrightarrow x = 1$ ou $x = \alpha$

comme (u_n) est décroissante pour tout n de $\mathbb{N}$, d'où : $u_n \leq u_0$ c-à-d : $u_n \leq 2$

Donc : $l \leq 2$

Alors : $l = 1$