ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal-2 2015

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

1 - on a : $(P) : x+y+z+4=0$ et $\Omega(1;-1;-1)$

a) $d(\Omega;(P)) = \dfrac{|x_\Omega + y_\Omega + z_\Omega + 4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{|1-1-1+4|}{\sqrt{3}} = \dfrac{|3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ **0.5 pt**

et puisque : $R = \sqrt{3}$ Alors : $d(\Omega;(P)) = R$

donc le plan (P) est tangent à la sphère (S). **0.25 pt**

b) on a : $(P) : x_H + y_H + z_H + 4 = 0 - 2 - 2 + 4 = 0$

Alors : $H \in (P)$ (1)

et on a : $\Omega H = \sqrt{(0-1)^2+(-2+1)^2+(-2+1)^2} = \sqrt{3}$

Alors : $\Omega H = R$

Alors : $H \in (S)$ (2)

d'après (1) et (2), H est le point de contact du plan (P) et la sphère (S). **0.5 pt**

2 - on a : $A(2;1;1)$ et $B(1;0;1)$

a) $*$ Alors : $\overrightarrow{OA}(2;1;1)$ et $\overrightarrow{OB}(1;0;1)$

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = (1-0)\vec{i} - (2-1)\vec{j} + (0-1)\vec{k}$$

donc : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ **0.5 pt**

$*$ on a $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}(1;-1-1)$ est le vecteur normal au plan (OAB). Alors l'équation cartésienne du plan (OAB) s'écrit sous la forme : $x-y-z+d=0$.

et on a : $A \in (OAB)$. Alors : $x_A + y_A + z_A + d = 0 \Leftrightarrow 2-1-1+d=0 \Leftrightarrow d=0$

donc : $(OAB) : x-y-z=0$ **0.25 pt**

b) puisque (Δ) est orthogonale au plan (P).

Alors $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}(1;-1-1)$ est le vecteur directeur de la droite (Δ).

et on a : $\Omega \in (\Delta)$

0.5 pt Alors : $(\Delta) : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = -1-t \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$ est la représentation paramétrique de la droite Δ

c) (S) est la sphère de centre $\Omega(1;-1;-1)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$.

Alors : $(S) : (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 3$

Et puisque : (Δ) passant par Ω, alors elle coupe la sphère en deux points.

$$(\Delta) \cap (S) : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = -1-t \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 3 \end{cases} ; \quad (t \in \mathbb{R})$$

$\Leftrightarrow (1+t-1)^2 + (-1-t+1)^2 + (-1-t+1)^2 = 3$

$\Leftrightarrow t^2 + t^2 + t^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = 1$

$\Leftrightarrow t = 1 \quad ou \quad t = -1$

Alors le triplet des coordonnées de chacun des deux points d'intersection de la droite (Δ) et

0.5 pt la sphère (S) sont : $(2;-2;-2)$ et $(0;0;0)$.

Exercice 2 : (3 pts)

0.25 pt **1 -** Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 10z + 26 = 0$

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times 1 \times 26 = 100 - 104 = -4$

Comme $\Delta \leq 0$ alors l'équation admet deux solutions distincts dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-10 - i\sqrt{-(-4)}}{2 \times 1} \\ &= \frac{-10 - i\sqrt{4}}{2} \\ &= \frac{-10 - 2i}{2} \\ &= -5 - i \end{aligned}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = -5 + i$$

Donc : $S = \{-5-i; -5+i\}$

0.5 pt **2 - a)** Montrons que : $\dfrac{b-\omega}{b-\omega} = i$.

$$\begin{aligned}\frac{b-\omega}{b-\omega} &= \frac{-5+i+3}{-2+2i+3}\\ &= \frac{-2+i}{2i+1}\\ &= \frac{i(2i+1)}{2i+1}\\ &= i\end{aligned}$$

0.5 pt **b)** Déduisons la nature du triangle ΩAB. Puisque $\dfrac{b-\omega}{b-\omega} = i$ alors $\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $\Omega B = \Omega A$.

Alors ΩAB est un triangle rectangle isocèle .

0.5 pt **3 -** Montrons que : d l'affixe du point D est $1+3i$.

a)

$$\begin{aligned}T(C) = D &\Longleftrightarrow \overrightarrow{CD} = \vec{u}\\ &\Longleftrightarrow d - c = 6 + 4i\\ &\Longleftrightarrow d = 6 + 4i - 5 - i\\ &\Longleftrightarrow d = 1 + 3i\end{aligned}$$

0.75 pt **b)** Montrons que : $\dfrac{b-d}{a-d} = 2$.

$*$ On a : $\dfrac{b-d}{a-d} = \dfrac{-5+i-(1+3i)}{-2+2i-(1+3i)} = \dfrac{-6-2i}{-3-i} = \dfrac{2(-3-i)}{-3-i} = 2.$

$*$ On a : $\dfrac{b-d}{a-d} = 2 \in \mathbb{R}$

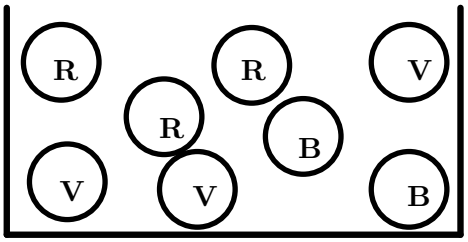
Donc les points B, D et A sont alignés et de plus $BD = 2AD$

Donc A est le milieu du segment $[BD]$.

Exercice 3 : (3 pts)

On tire successivement sans remise (A_n^p), 2 boules de l'urne.

on a : $card(\Omega) = A_8^2 = 8 \times 7 = 56$



1 - Calculons $P(A)$:

$*$ Méthode (1)

A :"2×(B et $\overline{B}$) ou (B ; B)"

Alors : $P(A)=\dfrac{card(A)}{card(\Omega)}=\dfrac{2\times(A_2^1\times A_6^1)+A_2^2}{56}=\dfrac{2\times2\times6+2}{56}=\dfrac{26}{56}=\dfrac{13}{28}$ **0.75 pt**

$*$ Méthode (2)

$\overline{A}$:"n'obtenir aucune boule blanche"

c.à.d : $\overline{A}$: "$(\overline{B};\overline{B})$"

Alors : $P(\overline{A})=\dfrac{card(\overline{A})}{card(\Omega)}=\dfrac{A_6^2}{56}=\dfrac{6\times5}{56}=\dfrac{30}{56}=\dfrac{15}{28}$

Donc : $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{15}{28}=\dfrac{28-15}{28}=\dfrac{13}{28}$.

Calculons $P(B)$:

B :"(R ;R) ou (B ;B) ou (V ;V)"

$P(B)=\dfrac{card(B)}{card(\Omega)}=\dfrac{A_3^2+A_2^2+A_3^2}{56}=\dfrac{3\times2+2\times1+3\times2}{56}=\dfrac{14}{56}=\dfrac{1}{4}$. **0.75 pt**

2 - X est la variable aléatoire qui est égal au nombre d boules blanches tirées.

$(X=0)$: "n'obtenir aucune boule blanche tirée".

$(X=1)$: "obtenir exactement une seule boule blanche".

$(X=2)$: "obtenir exactement deux boules blanches".

Alors : $X(\Omega)=\{0;1;2\}$

a) Calculons $P(X=2)$:

$P(X=2)=\dfrac{A_2^2}{56}=\dfrac{2}{56}=\dfrac{1}{28}$. **0.5 pt**

Calculons $P(X=0)$:

$P(X=0)=P(\overline{A})=\dfrac{15}{28}$. **0.25 pt**

Calculons $P(X=1)$: **0.25 pt**

$*$ Méthode (1)

$(X=1)$: "2×(B et $\overline{B}$)"

Alors : $P(X=1)=\dfrac{2\times A_2^1\times A_6^1}{56}=\dfrac{2\times2\times6}{56}=\dfrac{24}{56}=\dfrac{12}{28}=\dfrac{3}{7}$

$*$ Méthode (2)

$P(X=1)=1-P(X=0)-P(X=2)=1-\dfrac{15}{28}-\dfrac{1}{28}=\dfrac{28-16}{28}=\dfrac{12}{28}=\dfrac{3}{7}$

b) ∗ Donc la loi de probabilité :

a_i	0	1	2
$P(X = a_i)$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$

0.25 pt

∗ L'espérance mathématique $E(X)$:

0.25 pt $E(X) = 0 \times \frac{15}{28} + 1 \times \frac{12}{28} + 2 \times \frac{1}{28} = \frac{12+2}{28} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}$

Exercice 4 : (10 pts)

Partie I

Pour tout x de $\mathbb{R}$; on a :

$g(x) = e^x - 2x$

1 - soit x de $\mathbb{R}$; on a :

0.25 pt $g'(x) = (e^x - 2x)' = e^x - 2$

− pour $x = ln(2)$ on a : $g'(ln(2)) = 0$

− si $x \geq ln(2) \Leftrightarrow e^x \geq 2 \Leftrightarrow e^x - 2 \geq 0$

Alors : $(\forall x \in [ln(2); +\infty[) : g'(x) \geq 0$

0.25 pt Donc g est croissante sur $[ln(2); +\infty[$.

− si $x \leq ln(2) \Leftrightarrow e^x \leq 2 \Leftrightarrow e^x - 2 \leq 0$

Alors : $(\forall x \in]-\infty; ln(2)]) : g'(x) \leq 0$

0.25 pt Donc g est décroissante sur $]-\infty; ln(2)]$.

2 - $g(ln(2)) = e^{ln(2)} - 2ln(2) = 2 - 2ln(2) = 2(1 - ln(2))$

0.5 pt et puisque $ln(2) \backsimeq 0.69$

Alors : $g(ln(2)) > 0$

3 - on a : $g(ln(2))$ est la valeur minimale de g, et puisque $g(ln(2)) > 0$

0.5 pt Alors : $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) > 0$

Partie II

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = \frac{x}{e^x - 2x}$

0.5 pt **1 - a)** ∗ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x - 2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x(\frac{e^x}{x} - 2)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 2} = 0$

Car : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

0.5 pt ∗ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^x-2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x(\frac{e^x}{x}-2)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x}-2} = \dfrac{-1}{2}$

Car : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$

b) ∗ on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

0.25 pt Alors $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

∗ on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{-1}{2}$.

0.25 pt Alors $y = \frac{-1}{2}$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

2 - a) Soit $x \in \mathbb{R}$:

$f'(x) = \left(\dfrac{x}{e^x-2x}\right)' = \dfrac{x'(e^x-2x) - x(e^x-2x)'}{(e^x-2x)^2}$

$= \dfrac{e^x-2x-x(e^x-2)}{(e^x-2x)^2} = \dfrac{e^x-2x-xe^x+2x}{(e^x-2x)^2} = \dfrac{e^x(1-x)}{(e^x-2x)^2}$

0.75 pt Alors : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = \dfrac{e^x(1-x)}{(e^x-2x)^2}$

b) on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : e^x > 0$ et $(e^x-2x)^2 > 0$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend au signe de $(1-x)$.

pour $x = 1$ on a : $f'(1) = 0$

∗ si $x \geq 1 \Leftrightarrow 1-x \leq 0$

Alors : $(\forall x \in [1;+\infty[) : f'(x) \leq 0$

0.25 pt donc f est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

∗ si $x \leq 1 \Leftrightarrow 1-x \geq 0$

Alors : $(\forall x \in]-\infty;1]) : f'(x) \geq 0$

0.25 pt donc f est strictement croissante sur $]-\infty;1]$.

∗ tableau de signe de la fonction f :

0.25 pt

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{-1}{2}$	↗	$f(1) = 1.39$	↘	0

c) la droite (T) est tangente à la courbe (C_f) au point $O(0;0)$.

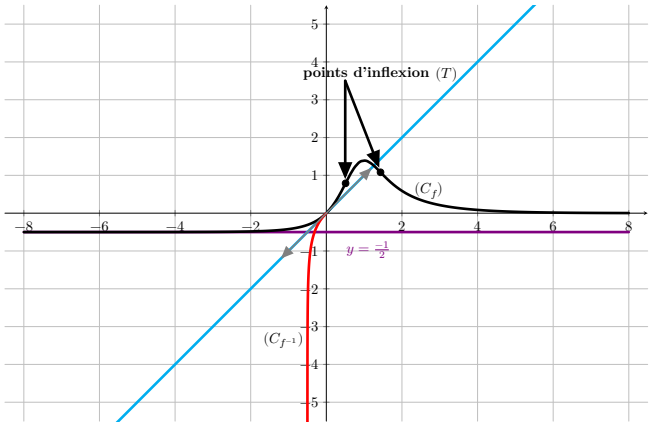
Alors : $(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

et on a : $f'(0) = \dfrac{(1-0)e^0}{(e^0-0)^2} = \dfrac{1}{1} = 1$

et : $f(0) = \dfrac{0}{e^0-2\times0} = 0$

0.25 pt Donc : $y = x$ est l'équation de la tangente (T).

1.5 pt **3 -** La courbe de la fonction f et la courbe de la fonction réciproque h^{-1} :



4 - a) pour tout x de $[0;+\infty[$, on a : $e^x - 2x \leq e^x$

et puisque : $(\int x \in \mathbb{R}) : g(x) = e^x - 2x > 0$ d'après la question $(P_1 - 3)$, c.à.d : $e^x - 2x \neq 0$

Alors : $\dfrac{1}{e^x} \leq \dfrac{1}{e^x - 2x}$

c.à.d : $e^{-x} \leq \dfrac{1}{e^x - 2x}$

0.25 pt d'où : $xe^{-x} \leq \dfrac{x}{e^x - 2x}$ pour tout x de $[0;+\infty[$ (1)

et on a d'après le tableau de variation de f, $f(1)$ est la valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$.

Alors : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \leq f(1)$

0.25 pt d'où : $\dfrac{x}{e^x - 2x} \leq \dfrac{1}{e-2}$ pour tout x de $[0;+\infty[$ (2)

0.25 pt d'après (1) et (2) on a : $xe^{-x} \leq \dfrac{x}{e^x - 2x} \leq \dfrac{1}{e-2}$ pour tout x de $[0;+\infty[$.

a) Montrons que : $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx = 1 - \frac{2}{e}$

0.25 pt on pose : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ Alors : $\begin{cases} u(x) = 1 \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$

0.25 pt Alors : $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx$

$= [-xe^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1$

0.25 pt $= -e^{-1} - (e^{-1} - 1) = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = -2e^{-1} + 1 = 1 - \dfrac{2}{e}$

b) puisque (C_f) est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[0;1]$.

Alors : $(\forall x \in [0;1]) : f(x) \geq 0$

0.25 pt Alors : $A(E) = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{e^x - 2x}dx$

et d'après question $(P_2 - 4 - a)$, on a :

$xe^{-x} \leq \dfrac{x}{e^x - 2x} \leq \dfrac{1}{e-2}$

0.25 pt Alors : $\int_0^1 xe^{-x} \leq \int_0^1 \frac{x}{e^x - 2x} \leq \int_0^1 \frac{1}{e-2}$

Donc : $1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \frac{1}{e-2}$.

Partie III

1 - on a pour tout x de $]-\infty;0]$: $h(x) = f(x)$

0.25 pt Alors d'après le tableau de variation de la fonction f on a h est continue et strictement croissante sur $]-\infty;0]$.

d'où la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur :

0.25 pt $J = h(]-\infty;0]) =]\lim_{x\to-\infty} h(x); h(0)] =]\frac{-1}{2};0]$

Partie IV

1 - Montrons par récurrence que $u_n \leq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$ on a $u_0 = -2$ et $-2 \leq 0$ alors $U_0 \leq 0$ est vrai.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a $u_n \leq 0$ d'après l'hypothèse de récurrence.

  Donc $h(u_n) \leq h(0)$ car h croissante sur $]-\infty;0]$.

  0.5 pt Donc $u_{n+1} \leq 0$ $(h(0) = 0)$
- D'où d'après le principe de récurrence $u_n \leq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - Montrons que (u_n) est croissante. On a $u_{n+1} - u_n = h(u_n) - u_n \geq 0$ car d'après la courbe

0.75 pt $h(x) \geq x$ pour tout x de l'intervalle $]-\infty;0]$.

Donc (u_n) est croissante.

3 - Déduisons que la suite (u_n) est convergente et calculons sa limite

— Comme (u_n) est croissante et $u_n \leq 0$ alors (u_n) est convergente.

— Soit $I =]-\infty;0]$, on a h est continue sur I , $f(I) = I$,$u_0 \in I$ et (u_n) est convergente

Alors $\lim u_n$ est une solution de l'équation $h(x) = x$

Et d'après la représentation graphique de la fonction f, on remarque que l'équation $h(x) = x$ admet une unique solution $x = 0$ sur $]-\infty;0]$.

0.75 pt Donc $\lim u_n = 0$.

FIN