ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2015

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **1 -** Montrons par récurrence que $u_n < 5$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Pour $n = 0$ on a $u_0 = 4$ et $4 < 5$ d'où $u_0 < 5$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

Supposons que $u_n < 5$ pour n fixé de $\mathbb{N}$ et montrons que $u_{n+1} < 5$

c'est-à-dire montrons que : $u_{n+1} - 5 < 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ On a :

$$u_{n+1} - 5 = \frac{2}{5}u_n + 3 - 5 = \frac{2}{5}u_n - 2$$
$$\Leftrightarrow u_{n+1} - 5 = \frac{2}{5}(u_n - 5)$$

Et puisque $u_n < 5$ alors $u_n - 5 < 0$

D'où $\frac{2}{5}(u_n - 5) < 0$ donc $u_{n+1} - 5 < 0$ d'où $u_{n+1} < 5$

D'après le raisonnement par récurrence on a $u_n < 5$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **2 -** Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire que la suite (u_n) est croissante.

- Vérifions que : $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}(\text{Soit } n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{2}{5} - 1\right)u_n + 3 \\ &= -\frac{3}{5}u_n + 3 \\ &= \frac{3}{5}(5 - u_n)\end{aligned}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$

- Montrer que la suite (u_n) est croissante.

$$(\text{Soit } n \in \mathbb{N})\ \ u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$$

Et puisque $u_n - 5 < 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$ donc $5 - u_n > 0$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\ u_{n+1} - u_n > 0$

Donc la suite (u_n) est croissante.

0.25 pt **3 -** Déduisons que la suite (u_n) est convergente.

Comme la suite (u_n) est croissante et aussi majorée par 5 $\quad((\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n < 5)$

Alors la suite (u_n) est convergente.

4 - Soit (v_n) la suite numérique telle que $v_n = 5 - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et exprimer v_n en fonction de n.

- Montrons que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$

$\forall n \in \mathbb{N})$ on a :

$$(\text{Soit } n \in \mathbb{N})\ \ v_{n+1} = 5 - u_{n+1} = 5 - \left(\frac{2}{5}u_n + 3\right).$$
$$= \frac{2}{5}(u_n - 5)$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$

- Exprimons v_n en fonction de n

$(\forall n \in \mathbb{N})\quad v_n = v_0 \times q^{n-0} = \left(\frac{2}{5}\right)^n$, car $v_0 = 5 - u_0 = 5 - 4 = 1$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\quad v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$

0.75 pt **b)** En déduire que $u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n).

- Déduisons que $u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

On sait que : $v_n = 5 - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ d'où $u_n = 5 - v_n$ et comme $v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$

Donc : $u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$

- Calculons la limite de la suite (u_n).

$\lim u_n = \lim\ 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n = 5$

Car $-1 < \frac{2}{5} < 1$, c'est-à-dire $\lim \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

Donc $\lim u_n = 0$

Exercice 2 : (3 pts)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, le plan (P) d'équation $2x - z - 2 = 0$ et la sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$.

1 pt **1 -** Montrons que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(-1, 0, 1)$ et son rayon est 3. ‘

On a :

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in (S) &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 + z^2 - 2z + 1 - 1 - 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = 3^2 \end{aligned}$$

Donc (S) est une sphère du centre $\Omega(-1, 0, 1)$ et de rayon $R = 3$

0.5 pt **2 - a)** Calculons la distance du point Ω au plan (P).

On a :

$$d(\Omega,(P)) = \frac{|2x_\Omega - z_\Omega - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \Leftrightarrow d(\Omega,(P)) = \frac{|2 \times (-1) - 1 - 2|}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow d(\Omega,(P)) = \frac{|-5|}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow d(\Omega,(P)) = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow d(\Omega,(P)) = \sqrt{5}$$

Donc : $d(\Omega,(P)) = \sqrt{5}$

0.5 pt **b)** Déduisons que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ).

On a : $d(\Omega,(P)) = \sqrt{5} < R$.

Donc le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ)

1 pt **3 -** Montrons que le rayon du cercle (Γ) est 2 et déterminer les coordonnées du point H centre du cercle (Γ).

- Montrons que le rayon du cercle (Γ) est 2 .

  soit r le rayon du cercle (Γ) , on a : $r = \sqrt{R^2 - d(\Omega,(P))^2}$.

  Donc $r = \sqrt{3^2 - \sqrt{5}^2}$, d'où $r = \sqrt{4} = 2$

- Déterminons les coordonnées du point H centre du cercle (Γ).

  on a H est la projection orthogonale de Ω centre de (Γ) sur le plan (P)

  ou bien l'intersection du plan (P) et la droite (Δ) passant par le point Ω

  et perpendiculaire au plan (P) .

Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ) .

Soit $M(x,y,z) \in (\Delta)$ on a : $\Omega \in (\Delta)$ Et puisque la droite (Δ) est perpendiculaire au plan (P) alors $\overrightarrow{u}(2,0,-1)$ est un vecteur directeur à la droite (Δ)

Par suite $\overrightarrow{\Omega M} = t.\overrightarrow{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$, Donc : $\begin{cases} x+1 = 2t \\ y-0 = 0 \\ z-1 = -t \end{cases} /(t \in \mathbb{R})$

D'où (Δ) : $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 0 \\ z = 1-t \end{cases} /(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de ladroite (Δ)

Déterminons $H(x_H, y_H, z_H)$ le point d'intersection de (Δ) et (P)

On a :

$$\begin{cases} x_H = -1+2t \\ y_H = 0 \\ z_H = 1-t \\ 2x_H - z_H - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -1+2t \\ y_H = 0 \\ z_H = 1-t \\ 2(-1+2t) - (1-t) - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -1+2t \\ y_H = 0 \\ z_H = 1-t \\ -2+4t-1+t-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -1+2t \\ y_H = 0 \\ z_H = 1-t \\ 5t-5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -1+2t \\ y_H = 0 \\ z_H = 1-t \\ t = 1 \end{cases}$$

Donc : $\begin{cases} x_H = -1+2 = 1 \\ y_H = 0 \\ z_H = 1-1 = 0 \end{cases}$

Finalement $H(1,0,0)$ est le centre du cercle (Γ).

Exercice 3 : (3 pts)

0.75 pt **1 - a)** Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 8z + 32 = 0$.

On a $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 32 = 64 - 128 = -64$

Comme $\Delta < 0$ alors $z_1 = \dfrac{-(-8) - i\sqrt{-\Delta}}{2} = \dfrac{8 - i\sqrt{64}}{2} = 4 - 4i$

Et $z_2 = \bar{z_1} = 4 + 4i$

Donc : $S = \{4 - 4i; 4 + 4i\}$

0.75 pt **b)** On considère le nombre complexe a tel que $a = 4 + 4i$.

puis en

- Écrivons le nombre complexe a sous sa forme trigonométrique

  On a $|a| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} a &= 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

  Donc : $a = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

- Déduisons que a^{12} est un nombre réel négatif.

$$\begin{aligned} a^{12} &= \left(4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{12} \\ &= \left(4\sqrt{2}\right)^{12}\left(\left(\cos\left(\frac{12\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{12\pi}{4}\right)\right)\right) \\ &= \left(4\sqrt{2}\right)^{12}\left((\cos(3\pi) + i\sin(3\pi)\right) \\ &= \left(4\sqrt{2}\right)^{12}\left((-1 + 0\right) \\ &= -\left(4\sqrt{2}\right)^{12} < 0 \end{aligned}$$

  Donc : a^{12} est un nombre réel négatif.

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tels que :

$a = 4 + 4i$, $b = 2 + 3i$ et $c = 3 + 4i$.

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

0.5 pt

a) Montrons que : $z^{'} = iz + 7 + i$.

on a

$$\begin{aligned} M' = R(M) &\Leftrightarrow z' - c = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - c) \\ &\Leftrightarrow z' - c = i(z - c) \\ &\Leftrightarrow z' = iz - ic + c \\ &\Leftrightarrow z' = iz + (1 - i)c \\ &\Leftrightarrow z' = iz + (1 - i)(3 + 4i) \\ &\Leftrightarrow z' = iz + 3 + 4i - 3i + 4 \\ &\Leftrightarrow z' = iz + 7 + i \end{aligned}$$

0.5 pt

b) Vérifions que d l'affixe du point D image du point A par la rotation R est $3 + 5i$.

on a D l'image du point A par la rotation R, donc :

$$\begin{aligned} D = R(A) &\Leftrightarrow d = ia + 7 + i \\ &\Leftrightarrow d = i(4 + 4i) + 7 + i \\ &\Leftrightarrow d = 4i - 4 + 7 + i \\ &\Leftrightarrow d = 3 + 5i \end{aligned}$$

0.5 pt

c) Montrons que l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i|$ est la droite (BC).

$$\begin{aligned} |z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i| &\Leftrightarrow |z - (3 + 5i)| = |z - (4 + 4i)| \\ &\Leftrightarrow |z_M - z_D| = |z_M - z_A| \\ &\Leftrightarrow DM = AM \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points M est la droite (Δ) la médiatrice du segment $[AD]$,

montrons que (Δ) est (BC)

d'une part on a $R(A) = D$ alors $CA = CD$ donc $C \in (\Delta)$

D'autre part $DB = |b - d| = |2 + 3i - 3 - 5i| = |-1 - 2i| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ et

$AB = |b - a| = |2 + 3i - 4 - 4i| = |-2 - i| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

Alors $DB = AB$ donc $B \in (\Delta)$

Donc : $(\Delta) = (BC)$.

Exercice 4 : (3 pts)

Une urne contient 5 jetons : deux jetons blancs , deux verts et un rouge (les jetons sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard successivement et avec remise trois jetons de l'urne .

1 pt

1 - Soit l'événement A : "les trois jetons tirés sont de même couleur ".

Montrons que $p(A) = \dfrac{17}{125}$.

On considère l'univers Ω, Le tirage est successivement et avec remise

donc $card(\Omega) = 5^3 = 125$

les jetons sont indiscernables au toucher signifie que $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$

$A : (B, B, B)$ où (V, V, V) où (R, R, R)

d'où $card(A) = 2^3 + 2^3 + 1^3 = 8 + 8 + 1 = 17$ Donc : $P(A) = \dfrac{17}{125}$

2 pt

2 - Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de jeton(s) blanc(s) tirés.

Déterminons la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Les boules tirées	La valeur de X
les trois boules sont $\bar{B}, \bar{B}, \bar{B}$	0
les trois boules sont $\bar{B}, \bar{B}, B$ où $\bar{B}, B, \bar{B}$ où $B, \bar{B}, \bar{B}$	1
les trois boules sont $\bar{B}, B, B$ où $B, \bar{B}, B$ où $B, B, \bar{B}$	2
les trois boules sont B, B, B	3

Donc : les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1, 2 et 3

la loi de probabilité de X :

$$p(X = 0) = \frac{3^3}{125} = \frac{27}{125}$$
$$p(X = 1) = 3\frac{2^1 \cdot 3^2}{125} = \frac{54}{125}$$
$$p(X = 2) = 3\frac{2^2 \cdot 3^1}{125} = \frac{36}{125}$$
$$p(X = 3) = \frac{2^3}{125} = \frac{8}{125}$$

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{8}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$

Exercice 5 : (8 pts)

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 - x + x\ln x$.

0,5 pt **1 - a)** Montrons que $g'(x) = \ln x$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

on a :
$$g'(x) = (1 - x + x\ln x)' = -1 + x'\ln x + x(\ln x)'$$
$$= -1 + \ln x + x \times \frac{1}{x} = -1 + \ln x + 1 = \ln x$$

Donc : $\forall x \in]0;+\infty[\,; \quad g'(x) = \ln x$

0,5 pt **b)** Montrons que la fonction g est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

le signe de $g'(x)$ c'est le signe de $\ln x$,

et puisque $\forall x \in]0;1]\,; \quad \ln x \leq 0\,;$ Alors $\forall x \in]0;1]\,; \quad g'(x) \leq 0$

Donc g est décroissante sur $]0;1]$

et puisque $\forall x \in [1;+\infty[\,; \quad \ln x \geq 0\,;$ Alors $\forall x \in [1;+\infty[\,; \quad g'(x) \geq 0$

Donc g croissante sur $[1;+\infty[$.

0,75 pt **2 -** Calculons $g(1)$ et déduisons que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

o on a :
$$g(1) = 1 - 1 + 1 \times \ln 1 = 1 - 1 + 1 \times 0 = 0$$

et puisque g admet un minimum au $1\,;$ Alors $\forall x \in]0;+\infty[\,; \quad g(x) \geq g(1)$

Donc : $\forall x \in]0;+\infty[\,; \quad g(x) \geq 0.$

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par :
$$f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}$$
et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité 1cm).

0,75 pt **1 -** Montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ et interpréter géométriquement ce résultat.

(pour calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$; remarque que $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1 - 2x\ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0;+\infty[$).

- On a :
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{3x^2 - 1 - 2x\ln x}{x^2} = -\infty$$

(Car : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 3x^2 - 1 = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$)

- Interprétation géométrique :

la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe (C) .

2 - Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ et déduisons la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$ **0,75 pt**

- On a :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 3-\frac{1}{x^2}-\frac{2\ln x}{x}=3$$
(Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$)
- Interprétation géométrique :
la droite d'équation $y=3$ est asymptote horizontale à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

3 - a) Montrons que $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x^3}$ pour tout x de $]0;+\infty[$. **0,75 pt**

On a :
$$\begin{aligned} f'(x)&=\left(3-\frac{1}{x^2}-\frac{2\ln x}{x}\right)'\\ &=\frac{2x}{x^4}-2\frac{(\ln x)'x-(\ln x)x'}{x^2}\\ &=\frac{2}{x^3}-2\frac{(1-\ln x)}{x^2}\\ &=\frac{2}{x^3}-\frac{2-2\ln x}{x^2}\\ &=\frac{2-2x+2x\ln x}{x^3}\\ &=\frac{2\,(1-x+x\ln x)}{x^3}\\ &=\frac{2g(x)}{x^3}\end{aligned}$$

Donc : $\forall x\in]0;+\infty[\,;\quad .\ f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x^3}$

b) Interprétation géométrique du résultat $f'(1)=0$. **0,25 pt**

On a :
$$f'(1)=\frac{2g(1)}{1}=0$$
et comme $f(1)=2$,

Donc : (C_f) admet une tangente horizontale (T) au point $(1,2)$.

c) Montrons que la fonction f est croissante sur $]0;+\infty[$. **0,5 pt**

On a : $\forall x\in]0;+\infty[\,;\quad .\ f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x^3}$.

Soit x de $]0;+\infty[$, on a $x^3>0$.

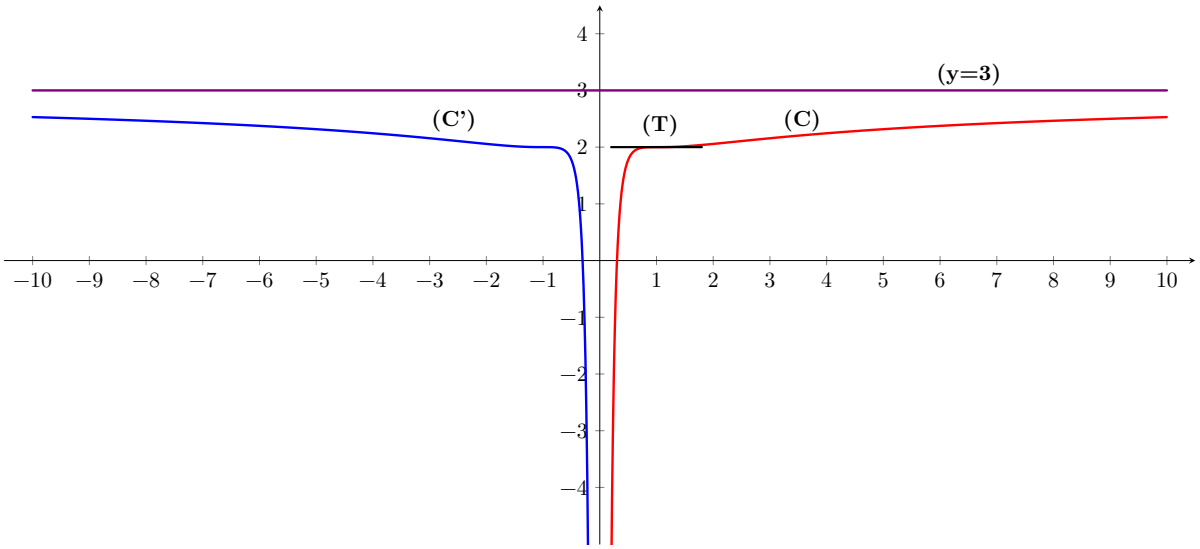
et d'après la question 2) partie I , on a : $\forall x\in]0;+\infty[\,;\quad g(x)\geq 0$.

Donc $\forall x\in]0;+\infty[\,;\quad f'(x)\geq 0$.

Donc : la fonction f est croissante sur $]0;+\infty[$.

0,75 pt **4 -** Construisons, dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe (C).

(On admettra que la courbe (C) possède deux point d'inflexion tels que 1 est l'abscisse de l'un de ces deux points et l'abscisse de l'autre est comprise entre 2 et $2,5$ et on prendra $f(0,3) = 0$)



0,5 pt **5 - a)** Montrons que : $\displaystyle\int_1^e \frac{2\ln x}{x}\, dx = 1.$

On a :

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{2\ln x}{x}\, \mathrm{d}x &= 2\int_1^e \frac{1}{x}\ln x\, \mathrm{d}x \\ &= 2\int_1^e (\ln x)'\ln x\, \mathrm{d}x \\ &= \left[\ln^2(x)\right]_1^e \\ &= \ln^2(e) - \ln^2(1) \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc : $\displaystyle\int_1^e \frac{2\ln x}{x}\, dx = 1$

0,75 pt **b)** Calculons, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

On sait que $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^e |f(x)|\mathrm{d}x \times u.a$. Comme f est croissante sur $]0, +\infty[$

Donc si $1 \leq x \leq e$ alors $f(1) \leq f(x) \leq f(e)$

Donc $0 < 2 \leq f(x)$, car $f(1) = 2$

Donc $\forall x \in [1, e]$ on a $f(x) \geq 0$ et $|f(x)| = f(x)$.

Alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x \times 1^2 cm^2 \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \times cm^2 \\ &= \left(\int_1^{\mathrm{e}} 3 - \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x\right) \times .cm^2 \\ &= \left(\left[3x + \frac{1}{x}\right]_1^{e} - 1\right) \times .cm^2 \\ &= 3e + \frac{1}{e} - 4 - 1 \times .cm^2 \\ &= \frac{1}{e}\left(3e^2 + 1 - 5e\right).cm^2\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A} = \frac{1}{e}\left(3e^2 + 1 - 5e\right).cm^2$

6 - Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{|x|}$.

0,75 pt **a)** Montrons que la fonction h est paire et que $h(x) = f(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

- Montrons que la fonction h est paire :

  On a $D_h = \mathbb{R}^*$, donc pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a $-x \in \mathbb{R}^*$.

  Soit x de $\mathbb{R}^*$. On a :
  $$\begin{aligned}h(-x) &= 3 - \frac{1}{(-x)^2} - \frac{\ln((-x)^2)}{|-x|} \\ &= 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{|x|} \\ &= h(x)\end{aligned}$$

  Alors $h(-x) = h(x)$ pour tout x de D_h . Donc la fonction h est paire

- Montrons que $h(x) = f(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$:

  Soit x de $]0;+\infty[$, on a :
  $$\begin{aligned}h(x) &= 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{|x|} \\ &= 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln(x)}{x} \\ &= f(x)\end{aligned}$$

  Car : $\forall x \in]0;+\infty[$; $|x| = x$ et $\ln(x^2) = 2\ln(x)$.

  Donc $h(x) = f(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

0,5 pt **b)** Construisons, dans le même repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe (C') représentant la fonction h.

On a : $h(x) = f(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$, donc la courbe (C') c'est la courbe (C) sur $]0;+\infty[$. et comme la fonction h est paire , alors sa courbe représentative est symétrique par rapport a l'axe des ordonnées . (voir le figure)