Exercice 1 — Session : NORMAL1 2015 — 3 Pts

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les deux points $A(2,1,0)$ et $B(-4,1,0)$. Soit (P) le plan passant par le point A et $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ son vecteur normal

0.5 pt **1 -** Montrer que $x+y-z-3=0$ est une équation cartésienne du plan (P).

2 - Soit (S) l'ensemble de points M de l'espace qui vérifient la relation : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

0.75 pt Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(-1,1,0)$ et de rayon 3

0.5 pt **3 - a)** Calculer la distance du point Ω du plan (P) puis en déduire que (P) coupe (S) suivant un cercle (C)

0.5 pt **b)** Montrer que le centre du cercle est le point $H(0,2,-1)$

0.75 pt **4 -** Montrer que $\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$ et en déduire l'aire du triangle OHB.

Exercice 2 — Session : NORMAL1 2015 — 3 Pts

I- On considère le nombre complexe a tel que : $a=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

0.5 pt **1 -** Montrer que le module du nombre complexe a est : $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

0.25 pt **2 -** Vérifier que a $=2\left(1+\cos\dfrac{\pi}{4}\right)+2i\sin\dfrac{\pi}{4}$.

0.25 pt **3 - a)** En linéarisant $\cos^2\theta$ avec θ est un nombre réel, montrer que :$1+\cos 2\theta=2\cos^2\theta$. .

0.5 pt **b)** Montrer que $a=4\cos^2\dfrac{\pi}{8}+4i\cos\dfrac{\pi}{8}\sin\dfrac{\pi}{8}$. (on rappelle que $\sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta$)

0.5 pt **c)** Montrer que $4\cos\dfrac{\pi}{8}\left(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$ est une forme trigonométrique du nombre a, puis montrer que $a^4=\left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i$

II- On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$,et les deux points Ω et A d'affixes respectives ω et a tels que : $\omega=\sqrt{2}$ et $a=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et la rotation R de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

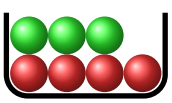
0.5 pt **1 -** Montrer que l'affixe b du point B l'image du point A par la rotation R est $2i$.

0.5 pt **2 -** Déterminer l'ensemble de points M d'affixe z tel que $|z-2i|=2$.

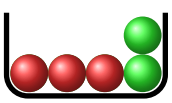
Exercice 3 — Session : NORMAL1 2015 — 3 Pts

Une urne U_1 contient 7 boules : *quatre* boules rouges et *trois* boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher)

Une autre urne U_2 contient 5 boules : *trois* boules rouges et *deux* boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher)



L'urne U_1



L'urne U_2

I) On considère l'épreuve suivante : On tire, simultanément, et au hasard, *trois* boules de l'urne U_1.

Soit l'événement A : "On tire *une seule* boule rouge et *deux* boules vertes"

Et l'événement B :" On tire *trois* boules de même couleur"

2 pt Montrer que $p(A) = \frac{12}{35}$ et $p(B) = \frac{1}{7}$ **II)** On considère l'épreuve suivante : On tire simultanément et au hasard deux boules de U_1 puis on tire au hasard une seule boule de U_2 .

Soit l'événement C : "On tire trois boules rouges".

1 pt Montrer que $p(C) = \frac{6}{35}$.

Exercice 4 — Session : NORMAL1 2015 — 11 Pts

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x telle que : $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$.

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (unité 2 cm).

I)

0,5 pt **1 -** Montrer que $D_f =]0;e[\cup]e;+\infty[$ $\left(D_f \text{ est l'ensemble de définition de la fonction } f\right)$

0,75 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} f(x)$, puis interpréter géométriquement les résultats obtenus

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote au voisinage **0,5 pt** de $+\infty$ que l'on déterminera.

0,5 pt **c)** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ puis donner une interprétation géométrique à ce résultat

$\left(\text{ pour calculer } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x), \text{ remarquer que } x(1-\ln x) = x - x\ln x\right)$

0,75 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ pour tout x de D_f

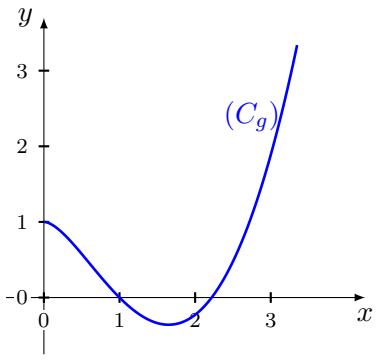
1 pt **b)** Montrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle] 0,1] et croissante sur chacun des deux intervalles $[1,e[$ et $]e,+\infty[$

0,25 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f

II)

Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2(1-\ln x)$

Et soit (C_g) la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé (voir la figure).



1 - a) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation (E) tel que :

0,5 pt (E) : $g(x) = 0$, $x \in]0;+\infty[$

b) On donne le tableau de valeurs suivant :

x	2.1	2.2	2.3	2.4
$g(x)$	-0.14	-0.02	0.12	0.28

0,5 pt Montrer que l'équation (E) admet une solution α telle que : $2.2 < \alpha < 2.3$

0,25 pt **2 - a)** Vérifier que $f(x) - x = \dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ pour tout x de D_f.

0,5 pt **b)** Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ coupe la courbe (C_f) aux points d'abscisses 1 et α

0,5 pt **c)** Déterminer, à partir de (C_g), le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1, \alpha]$ et montrer que $f(x) - x \leq 0$ pour tout x de $[1, \alpha]$

1,25 pt **3 -** Tracer, dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la droite (Δ) et la courbe (C_f).

0,75 pt **4 - a)** Montrer que $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} dx = \ln 2$

$\left(\right.$ remarquer que : $\dfrac{1}{x(1-\ln x)} = \dfrac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$ pour tout x de D_f $\left.\right)$

0,75 pt **b)** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), la droite (Δ), et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$.

III)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $_N$.

0,5 pt **1 -** Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq \alpha$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 pt **2 -** Montrer que la suite (u_n) est décroissante

$\left(\right.$ On pourra utiliser le résultat de la question **II) 2- c)** $\left.\right)$

0,75 pt **3 -** En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite

FIN