Exercice 1 Session : NORMAL2 2015 3 Pts

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, le plan (P) d'équation $x+y+z+4=0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1;-1;-1)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

0.75 pt **1 - a)** Calculer le distance $d(\Omega,(P))$ et en déduire que le plan (P) est tangent à la sphère (S)

0.5 pt **b)** Vérifier que le point $H(0;-2;-2)$ est le point de contact du plan (P) et la sphère (S)

2 - On considère les deux points $A(2;1;1)$ et $B(1;0;1)$

0.75 pt **a)** Vérifier que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ et en déduire que $x-y-z=0$ est une équation cartésienne du plan (OAB)

0.5 pt **b)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω est orthogonale au plan (OAB)

0.5 pt **c)** Déterminer les coordonnées de chacun des deux points d'intersection de le droite (Δ) et de la sphère (S)

Exercice 2 Session : NORMAL2 2015 3 Pts

0.75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+10z+26=0$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$, les points A, B, C et Ω d'affixes respectifs a, b, c et ω tels que : $a=-2+2i$, $b=-5+i$, $c=-5-i$ et $\omega=-3$

0.5 pt **a)** Montrer que : $\dfrac{b-\omega}{a-\omega}=i$

0.5 pt **b)** En déduire la nature du triangle ΩAB

3 - Soit le point D image du point C par la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $6+4i$

0.5 pt **a)** Montrer que l'affixe d du point D est $1+3i$

0.75 pt **b)** Montrer que : $\dfrac{b-d}{a-d}=2$ et en déduire que le point A est le milieu du segment $[BD]$

Exercice 3 Session : NORMAL2 2015 3 Pts

Une urne contient huit boules : 3 boules rouges, 3 boules vertes et deux boules blanches (les boules son indiscernables au toucher)

On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne

1.5 pt **1 -** On considère l'événement A suivant : "tirer une boule blanche au moins"
et l'événement B suivant : "tirer deux boules de même couleur"
Montrer que : $p(A)=\dfrac{13}{28}$ et $p(B)=\dfrac{1}{4}$.

2 - Soit X la variable aléatoire qui égale au nombre de boules blanches tirées

0.5 pt **a)** Montrer que $p(X=2)=\dfrac{1}{28}$

1 pt **b)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$

Exercice **4** **Session : NORMAL2 2015** **11 Pts**

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - 2x$.

0.75 pt **1 -** Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que g est décroissante sur $]-\infty, \ln 2]$ et croissante sur $[\ln 2, +\infty[$.

0.5 pt **2 -** Vérifier que $g(\ln 2) = 2(1 - \ln 2)$ puis déterminer le signe de $g(\ln 2)$.

0.5 pt **3 -** En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 2x}$. et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : $1cm$).

1 pt **1 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$.
(remarquer que $e^x - 2x = x\left(\dfrac{e^x}{x} - 2\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$)

0.5 pt **b)** Interpréter géométriquement chacun des deux derniers résultats.

0.75 pt **2 - a)** Montrer que $f'(x) = \dfrac{(1-x)e^x}{(e^x - 2x)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.75 pt **b)** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

0.25 pt **c)** Montrer que $y = x$ est une équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O origine du repère.

1 pt **3 -** Tracer, dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C).
(on prendra $\dfrac{1}{e-2} \approx 1,4$ et on admettra que la courbe (C) a deux points d'inflexion l'abscisse de l'un appartient à l'intervalle $]0, 1[$ et l'abscisse de l'autre est supérieur à $\dfrac{3}{2}$).

0.75 pt **4 - a)** Montrer que $xe^{-x} \leq \dfrac{x}{e^x - 2x} \leq \dfrac{1}{e-2}$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$.

0.75 pt **b)** En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx = 1 - \frac{2}{e}$.

0.5 pt **c)** Soit, en cm^2, $A(E)$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Montrer que : $1 - \dfrac{2}{e} \leq A(E) \leq \dfrac{1}{e-2}$.

Partie III

Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]-\infty; 0]$: $h(x) = f(x)$

0.5 pt **1 -** Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

0.5 pt **2 -** Tracer, dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $(C_{h^{-1}})$ représentative de la fonction h^{-1}.

Partie Ⅳ

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **1 -** Montrer par récurrence que $u_n \leq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **2 -** Montrer que la suite (u_n) est croissante.

(remarquer, graphiquement, que : $h(x) \geq x$ pour tout x de l'intervalle $]-\infty, 0]$).

0.75 pt **3 -** En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

FIN