Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2015 — 3 Pts

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 4 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

0.5 pt **1 -** Montrer par récurence que $u_n < 5$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **2 -** Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire que la suite (u_n) est croissante.

0.25 pt **3 -** En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4 - Soit (v_n) la suite numérique telle que $v_n = 5 - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et exprimer v_n en fonction de n.

0.75 pt **b)** En déduire que $u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2015 — 3 Pts

On cosidère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$,le plan (P) d'équation $2x - z - 2 = 0$ et la sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$.

1 pt **1 -** Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(-1, 0, 1)$ et son rayon est 3.

0.5 pt **2 - a)** Calculer la distance du point Ω au plan (P).

0.5 pt **b)** En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ).

Montrer que le rayon du cercle (Γ) est 2 et détermier les coordonnées du point H centre du cercle (Γ).

1 pt **3 -** Montrer que le rayon du cercle (Γ) est 2 et détermier les coordonnées du point H centre du cercle (Γ).

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2015 — 3 Pts

0.75 pt **1 - a)** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 8z + 32 = 0$.

0.75 pt **b)** On considère le nombre complexe a tel que $a = 4 + 4i$.

Ecrire le nombre complexe a sous sa forme trigonométrique puis en déduire que a^{12} est un nombre réel négatif.

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tels que :

$a = 4 + 4i$, $b = 2 + 3i$ et $c = 3 + 4i$.

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

0.5 pt **a)** Montrer que : $z' = iz + 7 + i$.

0.5 pt **b)** Vérifier que d l'affixe du point D image du point A par la rotation R est $3 + 5i$.

0.5 pt **c)** Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z-3-5i| = |z-4-4i|$ est la droite (BC).

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2015 — 3 Pts

Une urne contient 5 jetons : deux jetons blancs , deux verts et un rouge (les jetons sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard successivement et avec remise trois jetons de l'urne .

1 pt **1 -** Soit l'événement A : "les trois jetons tirés sont de même couleur ".
Montrer que $p(A) = \dfrac{17}{125}$.

2 pt **2 -** Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de jeton(s) blanc(s) tirés.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 5 — Session : RATTRAPAGE 2015 — 8 Pts

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 - x + x\ln x$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que $g'(x) = \ln x$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

0,5 pt **b)** Montrer que la fonction g est décroissante sur $]0;1]$ et croisssante sur $[1;+\infty[$.

0,75 pt **2 -** Calculer $g(1)$ et en déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}$$

et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité 1cm).

0,75 pt **1 -** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ et interpréter géométriquement ce résultat.

(pour calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$; remarque que $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1 - 2x\ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0;+\infty[$).

2 - Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ et en déduire la branche infinie de la courbe (C) au voisinage **0,75 pt** de$+\infty$

0,75 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x^3}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

0,25 pt **b)** Interpréter géométriquement le résultat $f'(1) = 0$.

0,5 pt **c)** Montrer que la fonction f est croissante sur $]0;+\infty[$.

0,75 pt **4 -** Tracer, dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe (C).
(On admettra que la courbe (C) possède deux points d'inflexion tels que 1 est l'abscisse de l'un de ces deux points et l'abscisse de l'autre est comprise entre 2 et 2,5 et on prendra $f(0,3) = 0$)

0,5 pt **5 - a)** Montrer que : $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2\ln x}{x} dx = 1$.

0,75 pt **b)** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$

6 - Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{|x|}$.

0,75 pt **a)** Montrer que la fonction h est paire et que $h(x) = f(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

0,5 pt **b)** Tracer, dans le même repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe (C') représentant la fonction h.

FIN